

УДК 681.5.015

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭЛЛИпсоИДОВ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Н.Н. Сальников

Институт космических исследований НАНУ и ГКАУ
Украина, 03680 ГСП Киев, пр. Академика Глушкова, 40, корп. 4/1
E-mail: salnikov.nikolai@gmail.com

А.Н. Сальникова

Киевский национальный университет имени Т.Г.Шевченко
Украина, 01033, Киев, ул. Владимирская, 64
E-mail: salnikoval@ukr.net

Ключевые слова: оценивание состояний, системы с распределенными параметрами, конечномерные аппроксимации, метод эллипсоидов.

Рассматривается задача оценивания состояния распределенной динамической системы в ограниченной области при известных граничных, но неизвестных начальных условиях. Для решения задачи используются конечномерная модель процесса, получаемая методом Галеркина, и оценивание состояния этой модели с помощью метода эллипсоидов. Особенности предлагаемого подхода обсуждаются и анализируются на двух примерах решения задач оценивания положений и скоростей струны и мембраны.

APPLYING THE ELLIPSOID METHOD TO STATE ESTIMATION OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS

N.N. Salnikov

Institute of Space Researches of the NASU and SCAU
Ukraine, 03680 GSP Kyiv, Akademika Glushkova Prospect, 40, building 4/1
E-mail: salnikov.nikolai@gmail.com

A.N. Salnikova

Kyiv National University named after T.G. Shevchenko
Ukraine, 01033, Kyiv, Vladimirska Street, 64
E-mail: salnikoval@ukr.net

Key words: state estimation, distributed parameter systems, finite-dimensional approximations, method of ellipsoids.

A problem of state estimation of a distributed dynamic system in a bounded domain under known boundary but unknown initial conditions is considered. To solve the problem, a finite-dimensional model of the process, obtained by use of the Galerkin method, and model state estimation by use of the ellipsoid method are used. Features of the proposed approach are discussed and analyzed by use of two examples of solving problems of estimating positions and velocities of a string and diaphragm.

1. Введение

Оценивание или наблюдение состояний систем с распределенными параметрами (СРП) является исключительно важной процедурой для этих систем, поскольку в таких системах, как правило, невозможно измерить всю функцию (вектор) состояния – для этого необходимо иметь значительное число измерительных устройств, достаточно плотно заполняющих область протекания процесса. Поэтому для целей управления или прогнозирования поведения СРП необходимо восстанавливать вектор состояния, используя локальные измерения.

Задаче оценивания состояния СРП посвящено труднообозримое число работ, начиная с исторически первых [1-7] и заканчивая работами последних лет, ссылки на которые можно найти в обзоре [8], а также в относительно недавно вышедшей книге [9], где подробно рассматриваются различные аспекты этой задачи. Исходными для решения задачи оценивания состояния является наличие измерений и математическая модель объекта.

Большинство моделей СРП получаются исходя из так называемых первичных принципов, т.е. с использованием фундаментальных физических законов. Иногда именно эта форма уравнений непосредственно используется для построения наблюдателей состояния [10]. В частности, в линейном случае решение соответствующих уравнений в частных производных выражается в интегральном виде с использованием фундаментального решения. Решение задачи оценивания состояния получается с использованием вариационных методов. Более универсальный подход связан с представлением исходных уравнений в частных производных в виде дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с использованием теории полугрупп непрерывных операторов [11]. Получаемые при этом уравнения по форме совпадают с уравнениями для конечномерного случая, однако, теперь в них фигурируют дифференциальные или интегральные операторы относительно пространственных переменных. Это совпадение позволяет использовать аналоги подходов, применяемых в конечномерном случае, для решения задачи построения наблюдателя или фильтра для СРП.

Практическая реализация алгоритмов оценивания состояния СРП связана с необходимостью численного решения уравнений в частных производных, в частности, с дискретизацией этих уравнений по пространственным переменным. При этом принято выделять два основных подхода:

- ранняя дискретизация (английский термин *early laming*), при которой с помощью одного из численных методов получается конечномерная модель СРП, а затем используются методы оценивания состояния этой конечномерной системы;
- поздняя дискретизация (английский термин *late laming*), при которой для решения задачи оценивания используются исходные уравнения, получается (если это возможно) аналитическое решение, и только после получения итоговых уравнений переходят к их дискретным аналогам для получения численных процедур решения.

Последний подход требует в общем случае более сложных математических построений, чем первый. Несмотря на это к настоящему времени продолжают развиваться оба подхода [8, 9, 12-16].

В данной работе рассматривается задача оценивания состояния распределенного процесса, протекающего в ограниченной области при известных граничных условиях, но неизвестных начальных условиях, и который описывается линейным уравнением. Для решения задачи используется первый подход (ранняя дискретизация). Конечномерная модель процесса получается с использованием метода Галеркина или Петрова-Галеркина [17-19], который применим для получения численного решения широкого

класса уравнений в частных производных. Особенность рассматриваемой задачи заключается в использовании нестохастического подхода [20-24] к трактовке неопределенности при оценивании состояния этой конечномерной модели. В частности, для оценивания состояний использовался модифицированный метод эллипсоидов [25], обладающий достаточно высокой скоростью сходимости и устойчивостью по отношению к нарушению априорных гипотез о неопределенных величинах. Применение предложенного подхода проиллюстрировано на примере решения двух модельных задач, а именно, оценивания состояний колеблющейся струны и мембраны с использованием точечных измерений и измерений вдоль линий соответственно. Мотивацией рассмотрения последней задачи послужили исследования динамики волновых процессов в гелиосферной плазме. Измерения физических параметров протекания этих процессов производятся с помощью группировки спутников вдоль их траекторий, пронизывающих исследуемую область. С использованием этих измерений требуется восстановить пространственную картину протекания этих процессов.

2. Постановка задачи и схема решения

Пусть исследуемый распределенный процесс описывается скалярной функцией $h = h(x, t)$, удовлетворяющей следующим уравнениям в частных производных

$$(1) \quad \frac{\partial^p h}{\partial t^p} = L(h) + f(x, t), \quad t \in (0, T], x \in \Omega,$$

$$(2) \quad G(h) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

В этих уравнениях t – время, Ω – односвязная ограниченная область в вещественном евклидовом пространстве R^q , где q может принимать значения от 1 до 3, Γ – граница области Ω . Граничные условия (2) для уравнения (1) будем считать однородными. Будем предполагать, что в (1) и (2) $L(h)$ и $G(h)$ – линейные дифференциальные операторы по пространственным переменным относительно h , коэффициенты при производных у этих операторов могут зависеть от пространственной координаты x , от времени t не зависят. Целое число p в (1) равно 1 или 2. Кусочно-непрерывная функция $f(x, t) \in C(\Omega \times (0, T])$ может представлять, как распределенные источники входных воздействий на процесс, так и являться следствием сведения исходной неоднородной по граничным условиям задачи к однородной.

Далее рассмотрим схему решения задачи для случая $p = 1$. Схема решения для случая $p = 2$ будет пояснена при рассмотрении численных примеров. При $p = 1$ начальные условия для уравнения (1) могут иметь следующий вид $h(x, 0) = h_0(x)$. По условию задачи будем считать их неизвестными. Однако будем предполагать, что эти начальные условия в совокупности с граничными (2) обеспечивают существование, единственность и устойчивость решения задачи (1) и (2).

Будем также предполагать, что уравнения (1) и (2) допускают получение решения методом Галеркина или Петрова-Галеркина [17-19]. Это означает, что существуют наборы базисных функций $H_i(x)$ и весовых функций $W_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, при которых функция

$$(3) \quad \tilde{h}(x, t) = \sum_{i=1}^n z_i(t) H_i(x) = H(x)^T z(t)$$

равномерно аппроксимирует решение задачи (1), (2) в рассматриваемой области $\Omega \times (0, T]$ с заданной константой $\varepsilon > 0$, т.е. выполняется следующее неравенство

$$(4) \quad |\tilde{h}(x,t) - h(x,t)| < \varepsilon \quad \forall t \in (0, T], \forall x \in \Omega.$$

В выражении (3) $H(x) = (H_1(x), H_2(x), \dots, H_n(x))^T$, вектор $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))^T$ удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(5) \quad M \frac{dz(t)}{dt} = Az(t) + F(t),$$

где матрицы $M = \int_{\Omega} WH^T d\Omega$, $A = \int_{\Omega} WL(H^T) d\Omega$, векторы $F(t) = \int_{\Omega} f(x,t)W(x) d\Omega$,

$W(x) = (W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x))^T$. При использовании метода Галеркина, весовые функции берутся совпадающими с базисными, $W(x) = H(x)$. Начальные условия для уравнения (5) имеют вид $z(0) = z_0$, где вектор z_0 функционально связан с неизвестной функцией $h_0(x)$ и, следовательно, неизвестен.

Будем предполагать, что в дискретные моменты времени $t_k = \Delta t \cdot k$ ($k = 0, 1, \dots$) производится измерение величины $h(x, t_k)$ в конечном числе точек $x_{ks} = x_s(t_k)$, $s = \overline{1, n_y(k)}$, области Ω . Здесь $x_s(t) : R \rightarrow R^q$ – известные функции времени. Число точек измерений $n_y(k)$ может быть разным для разных моментов времени k . Далее, чтобы не усложнять обозначения, вместо $n_y(k)$ будем писать просто n_y . Таким образом, в каждый момент времени вектор измерений $y_k \in R^{n_y}$ определяется выражением

$$(6) \quad y_k = y(t_k) = (y_1(t_k), \dots, y_{n_y}(t_k))^T = h_k + \xi(t_k).$$

Здесь вектор $h_k = (h(x_{k1}, t_k), \dots, h(x_{kn_y}, t_k))^T$ и $\xi_k = (\xi_1(t_k), \dots, \xi_{n_y}(t_k))^T$ – вектор ограниченных ошибок измерения,

$$(7) \quad |\xi_s(t)| \leq c_s, \quad \forall t \geq 0, \quad s = \overline{1, n_y},$$

где c_s , $s = \overline{1, n_y}$ – известные положительные константы.

Задача заключается в построении вычислительной процедуры, которая на основе модели процесса (1) и (2), описываемой уравнениями (3) и (5), а также измерений (6) при условии (7) позволит получать в темпе со временем оценку $\hat{h}(x, t) = H(x)^T \hat{z}(t)$ функции $h(x, t)$, для которой при любом фиксированном числе $c > 0$, существует такой конечный момент времени K , начиная с которого выполнялось неравенство

$$|h(x, t_k) - \hat{h}(x, t_k)| \leq c + \varepsilon \quad \forall k \geq K_1 \quad \forall x \in \Omega.$$

Разрешимость этой задачи будет обсуждаться далее при рассмотрении конкретных примеров.

Приведем уравнение измерения (6) к виду, используемому в задачах оценивания состояний динамических систем [26]. Для этого запишем компоненты $h_k^s = h(x_{ks}, t_k)$ вектора h_k , используя (3) и оценку (4), в виде

$$(8) \quad h_k^s = h(x_{ks}, t_k) = \sum_{i=1}^n z_i(t_k) H_i(x_{ks}) + \varepsilon_k^s = (C_{ks})^T z(t_k) + \varepsilon_k^s,$$

где элементы вектора $C_{ks} = (C_{ks}^1, \dots, C_{ks}^n)^T$ определяются выражением $C_{ks}^i = H_i(x_{ks})$. В выражении (8) величина ε_k^s отражает ошибку представления решения в виде конечного ряда (3). Как следует из (4),

$$(9) \quad |\varepsilon_k^s| < \varepsilon.$$

Сформируем из векторов C_{ks} матрицу $C_k = (C_{k1} : \dots : C_{kn_y})$ и рассмотрим вектор $\varepsilon_k = (\varepsilon_k^1, \dots, \varepsilon_k^{n_y})^T$. Тогда (6) с учетом сделанных обозначений и выражения (8) можно записать в виде

$$(10) \quad y_k = C_k^T z(t_k) + \xi_k + \varepsilon_k.$$

Это уравнение в совокупности с уравнением (5) представляют собой классические уравнения задачи оценивания вектора состояния $z(t_k)$ системы (5) по результатам измерения вектора y_k . При определенном выборе матрицы C_k , т.е. при определенном выборе точек или линий измерения, можно обеспечить наблюдаемость системы (5) и (10) и, следовательно, обеспечить однозначное решение задачи оценивания вектора $z(t_k)$. Особенность задачи заключается в том, что, во-первых, матрица C_k может менять свою размерность с течением времени, во-вторых, отсутствуют данные о стохастических свойствах помех измерения, а неизвестный вектор ε_k по определению не является случайной величиной. Для этих величин известны лишь оценки (7) и (9). Поэтому для решения задачи оценивания предлагается использовать метод эллипсоидального оценивания [20–23], в частности модифицированный метод эллипсоидов [25], который не использует предположения о стохастической природе неопределенных величин, более того, не предполагает наличие априорной множественной оценки для вектора z_0 .

Особенно простой вид уравнений (5) получается, если в качестве базисных функций метода Галеркина используются собственные функции задачи (1), (2). Именно этот случай будет рассмотрен ниже при численном моделировании.

3. Оценивание положений и скоростей точек струны при точечных измерениях

Рассмотрим задачу о восстановлении пространственных колебаний струны по измерениям ее отклонений в отдельных точках. Предполагаем, что струна длины L совершает малые плоские колебания около положения равновесия. Такие колебания описываются [27] следующим уравнением

$$(11) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = d_0^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad t \in (0, \infty), x \in [0, L],$$

где $h = h(x, t)$ – отклонение струны от положения равновесия, $d_0 = \sqrt{F_0 / \rho}$. Здесь F_0 – сила натяжения струны и ее плотность ρ , которую будем считать постоянной. Рассмотрим случай, когда один (левый) конец струны закреплен, второй – свободен. Граничные условия в этом случае имеют следующий вид

$$(12) \quad h(0, t) = 0, \quad \partial h(x, t) / \partial x|_{x=L} = 0.$$

Начальные условия для уравнения (11) можно записать в виде

$$(13) \quad h(x, 0) = h_0(x), \quad \partial h(x, t) / \partial t|_{t=0} = h_1(x),$$

где функции начальных положений струны $h_0(x)$ и скоростей $h_1(x)$ неизвестны.

Решение уравнения (11) при условии (12) может быть представлено [27] в виде следующего ряда

$$(14) \quad h(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(t) H_i(x),$$

где обозначено

$$(15) \quad H_i(x) = \sin \lambda_i x, \quad g_i(t) = (a_i \cos(d_0 \lambda_i t) + b_i \sin(d_0 \lambda_i t)), \quad i = 1, 2, \dots$$

Здесь $\lambda_i = (2i-1)\pi/(2L)$. Для того, чтобы ряд (14) удовлетворял условиям (13), коэффициенты a_i и b_i должны определяться следующими выражениями

$$(16) \quad a_i = \frac{2}{L} \int_0^L h_0(x) \sin(\lambda_i x) dx = 0, \quad b_i = \frac{4}{(2i-1)\pi d_0} \int_0^L h_1(x) \sin(\lambda_i x) dx, \quad i = 1, 2, \dots$$

Выражения (14)-(16) будут использованы в численном примере для моделирования динамики струны.

Предполагается, что в одной или нескольких точках x_s , $s = \overline{1, n_y}$, производится измерение отклонения струны. В результате в каждый момент времени доступны значения функций

$$(17) \quad y_s(t) = h(x_s, t) + \xi_s(t), \quad s = \overline{1, n_y}.$$

Здесь $\xi_s(t)$ – ограниченная помеха измерения, $|\xi_s(t)| \leq c_s$, каждая константа c_s предполагается известной.

Дальнейшую процедуру решения рассмотрим на конкретном численном примере. Положим $d_0 = 1$ и $L = 10$. Для моделирования динамики струны выберем следующие начальные условия

$$(18) \quad h_0(x) \equiv 0, \quad h_1(x) = \begin{cases} \cos \frac{6\pi}{L}(x - 3L/4) + 1, & x \in [7/12L, 11/12L]; \\ 0, & x \in [0, L] \wedge x \notin [7/12L, 11/12L]. \end{cases}$$

Эти условия означают, что в начальный момент времени отклонение струны от положения равновесия равно нулю, а на участке струны $[7/12L, 11/12L]$ ее точки имеют ненулевые начальные скорости. График функции $h_1(x)$ представлен на рис. 1.

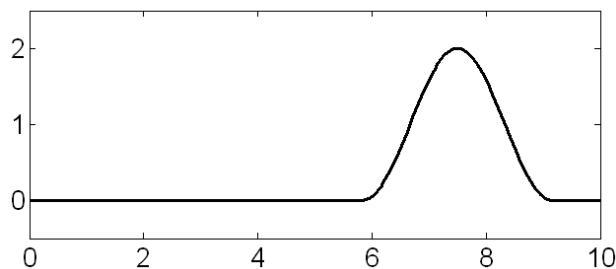


Рис. 1. График скоростей точек струны в начальный момент времени.

Можно убедиться, что при начальных условиях (18) для усеченного ряда

$$(19) \quad \bar{h}(x, t) = \sum_{i=1}^n g_i(t) H_i(x)$$

при $n = 15$ выполняется

$$(20) \quad \max_{x \in [0, L]} |h(x, t) - \bar{h}(x, t)| \leq \varepsilon, \quad \max_{x \in [0, L]} |\partial h(x, t) / \partial t - \partial \bar{h}(x, t) / \partial t| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0,$$

где $\varepsilon = 0,05$. Для рассматриваемой задачи собственные функции $H_i(x)$ известны. Однако мы рассмотрим более общий случай, когда аналитические выражения для собственных функций $H_i(x)$ неизвестны и вместо них используются их аппроксимации

$\bar{H}_i(x)$, полученные численно. В частности, такая ситуация возможна, когда плотность струны не является постоянной, $\rho = \rho(x)$.

Рассмотрим получение $\bar{H}_i(x)$ с помощью метода конечных элементов (МКЭ) [17, 28, 29]. Разобьем интервал $[0, L]$ на элементы – попарно непересекающиеся интервалы (x_{i-1}, x_i) ($i = \overline{1, N}$), равной длины $\Delta x = x_i - x_{i-1} = L/N$. Приближенное решение уравнения (11) ищем в виде

$$(21) \quad \tilde{h}(x, t) = \sum_{i=0}^N \tilde{g}_i(t) N_i(x),$$

где $N_i(x)$ – кусочно-линейные базисные функции [17, 28], непрерывные и отличные от нуля на интервале $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, линейные на $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$, $N_i(x_i) = 1$, равные нулю на границе $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Значения коэффициентов $\tilde{g}_0(t)$ и $\tilde{g}_N(t)$ в (21) определяются граничными условиями (12) и имеют следующий вид

$$(22) \quad \tilde{h}(x_0, t) = \tilde{g}_0(t) \equiv 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{h}(x, t)}{\partial x} \right|_{x \in [x_{N-1}, x_N]} = \tilde{g}_N(t) / \Delta x - \tilde{g}_{N-1}(t) / \Delta x \equiv 0.$$

Для остальных коэффициентов $\tilde{g}_i(t)$, $i = \overline{1, N-1}$, при использовании МКЭ получается [28] следующая система дифференциальных уравнений

$$(\ddot{\tilde{g}}_{i-1} + 4\ddot{\tilde{g}}_i + \ddot{\tilde{g}}_{i+1}) / 6 = d_0^2 (\tilde{g}_{i+1} - 2\tilde{g}_i + \tilde{g}_{i-1}) / (\Delta x)^2, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Эту систему уравнений можно записать в следующем векторно-матричном виде

$$(23) \quad M_1 \ddot{\tilde{g}} = M_2 \tilde{g},$$

где вектор $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{N-1})^T$, $(N-1) \times (N-1)$ -матрицы

$$(24) \quad M_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad M_2 = 6 \frac{d_0^2}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Выражение (21) в совокупности с (22) и (23) представляет приближенное (слабое) решение уравнения (11) при условиях (12) и (13). Начальные условия для уравнения (23) однозначно определяются с использованием начальных условий (13). При достаточно большом N функция $\tilde{h}(x, t)$ будет удовлетворять условию (20) [28].

Выражение (21) с учетом (22) запишем в следующем виде

$$(25) \quad \tilde{h}(x, t) = \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{g}_i(t) \tilde{N}_i(x) = \tilde{g}^T(t) \tilde{N}(x),$$

где $\tilde{N}_i(x) = N_i(x)$, $i = \overline{1, N-2}$; $\tilde{N}_{N-1}(x) = N_{N-1}(x) + N_N(x)$, $\tilde{N}(x) = (\tilde{N}_1(x), \dots, \tilde{N}_{N-1}(x))^T$.

Пусть матрица $\bar{G} = (\bar{g}_1 : \dots : \bar{g}_{N-1})$ составлена из собственных векторов \bar{g}_j , $j = \overline{1, N-1}$, следующей обобщенной задачи на собственные значения

$$(26) \quad \gamma_j M_1 \bar{g}_j = M_2 \bar{g}_j.$$

Можно убедиться, что при условии (24) все собственные значения этой задачи $\gamma_j = -\bar{\lambda}_j^2 < 0$. Считаем, что они упорядочены по номерам j в порядке возрастания их абсолютной величины. Перепишем равенства (26) в виде

$$(27) \quad M_1 \bar{G} \Lambda = M_2 \bar{G}.$$

где $\Lambda = \text{diag}(-\bar{\lambda}_1^2, \dots, -\bar{\lambda}_{N-1}^2)$ – диагональная матрица. Перейдем в (23) и (25) к новой переменной

$$g(t) = \bar{G}^{-1} \tilde{g}(t).$$

Выразив отсюда $\tilde{g}(t) = \bar{G}g(t)$ и подставив в (23) и (25), с учетом (27) получим

$$(28) \quad \ddot{g} = \Lambda g,$$

$$(29) \quad \tilde{h}(x, t) = g^T(t) \bar{G}^T \tilde{N}(x) = g^T(t) \bar{H}(x) = \bar{H}^T(x) g(t),$$

где вектор $\bar{H}(x) = \bar{G}^T \tilde{N}(x) = (\bar{H}_1(x), \dots, \bar{H}_{N-1}(x))^T$, $\bar{H}_i(x) = \bar{g}_i^T \tilde{N}(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \bar{g}_{ij}(t) \tilde{N}_j(x)$ –

оценка собственной функции $H_i(x)$, $\bar{\lambda}_i$ – оценка λ_i , полученные с помощью МКЭ.

Для расчета собственных функций $\bar{H}_i(x)$ было взято $N = 200$, $d_0 = 1$, $L = 10$. Было установлено, что точность расчета собственных функций и собственных значений ухудшалась с ростом номера i . Графики точных значений λ_i (сплошная линия) и значений $\bar{\lambda}_i$ (пунктирная линия), полученных МКЭ, в зависимости от номера i приведены на рис. 2. На рис. 3 приведены фрагменты графиков собственной функции $H_{150}(x)$ и функции $\bar{H}_{150}(x)$, полученной с помощью МКЭ.

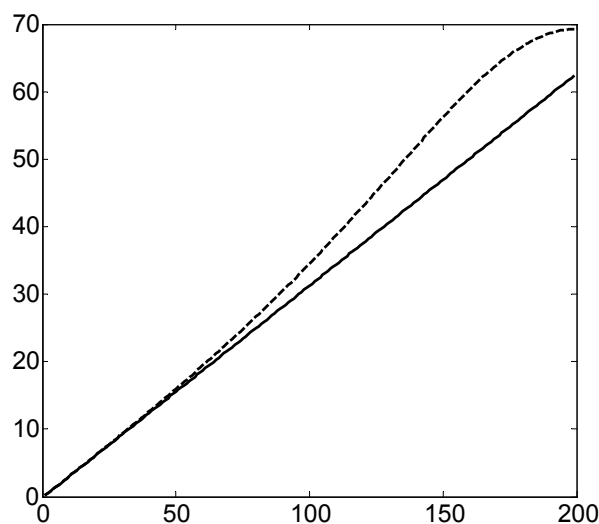


Рис. 2. Графики собственных значений, полученных аналитически (сплошная линия) и численно (штрихованная линия) в зависимости от их номера.

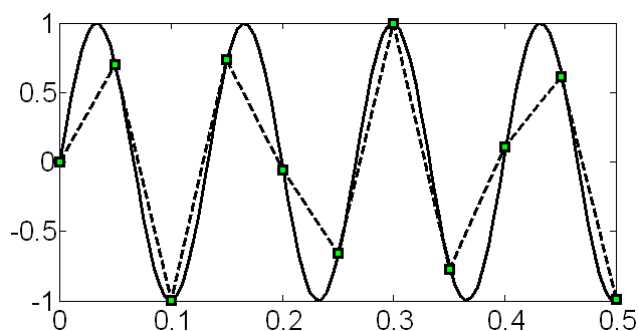


Рис. 3. Фрагмент графика собственных функций для $i=150$, полученных аналитически (сплошная линия) и численно (штрихованная линия) в зависимости от x .

Эти графики свидетельствуют о росте с номером i ошибок аппроксимации собственных функций $H_i(x)$ и чисел λ_i . Можно показать, что в силу этого непосредственное использование модели (28) и (29) или эквивалентной модели в виде (23) и (25), приведет к неприемлемым ошибкам восстановления мод колебаний исходного уравнения с большими номерами. Поэтому в качестве конечномерной модели были взяты уравнения (28) и (29), но с усеченным вектором $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))^T$. Систему (28) можно записать в векторно-матричном виде

$$(30) \quad \dot{z}(t) = Az(t),$$

где вектор $z(t) = (g^T(t), \dot{g}^T(t))^T$, матрица

$$A = \begin{pmatrix} \Theta & I \\ \Lambda & \Theta \end{pmatrix}.$$

Здесь Θ и I – нулевая и единичная матрицы соответствующего размера.

Рассмотрим случай, когда измерению доступно отклонение струны в одной точке x_1 . В этом случае измеряемая величина – скаляр, и из (17) получаем, что

$$(31) \quad \begin{aligned} y(t) &= h(x_1, t) + \xi(t) = \bar{h}(x_1, t) + \xi(t) + \varepsilon(t) = \\ &= \sum_{i=0}^n g_i(t) \bar{H}_i(x_1) + \xi(t) + \varepsilon(t) = C^T z(t) + \xi(t) + \varepsilon(t), \end{aligned}$$

где вектор $C = (\bar{H}_1(x_1), \dots, \bar{H}_n(x_1), 0, \dots, 0)^T \in R^{2n}$. При получении (31) было использовано (25) и соответствующая оценка (20). Уравнения (30) и (31) представляют собой стандартный набор уравнений для решения задачи об оценивании вектора $z(t)$ по результатам наблюдения величины $y(t)$ [26]. Имея в виду реализацию решения этой задачи на ЭВМ, перейдем от уравнений (30) и (31) в непрерывном времени к уравнениям в дискретном времени

$$(32) \quad \begin{aligned} z_{k+1} &= Az_k; \\ y_k &= C^T z_k + \xi_k + \varepsilon_k, \end{aligned}$$

где матрица $A = I + A\Delta t + A^2(\Delta t)^2$, вектор $z_k = z(t_k)$ – значение вектора $z(t)$ в дискретный момент времени $t_k = \Delta t \cdot k$, $k = 0, 1, \dots$, остальные величины с индексом k имеют аналогичный смысл.

Поскольку относительно помех измерения ξ_k и ошибки модели ε_k известно лишь то, что они ограничены, то для решения задачи оценивания состояния системы (32) можно воспользоваться модифицированным методом эллипсоидов [25, 30].

При моделировании было взято $x_1 = 6,1$; $d_0 = 1$, $L = 10$. Интервал дискретности по времени был выбран $\Delta t = 0,4$ сек, что составляло примерно четверти периода колебаний, соответствующих самой высокой частоте или самому большому собственному значению $\bar{\lambda}_n$. Для моделирования динамики движения струны, а также для моделирования процесса измерения использовалось аналитическое решение в виде (14). Было взято 100 первых слагаемых ряда (14). Помеха измерения моделировалась с помощью датчика случайных чисел, равномерно распределенных в интервале $[-c, c]$. При этом $c = 0,3$, что составляло примерно 10% от максимального значения отклонения струны. На рис. 4 изображен график ошибки оценивания положения точек струны

$e_h(t_k) = \max_{x \in [0, L]} |h(t_k, x) - \hat{g}^T(t_k) \bar{H}(x)|$ в зависимости от дискретного времени $k = 0, 1, \dots$, а

на рис. 5 график ошибки оценивания скоростей точек струны

$e_v(t_k) = \max_{x \in [0, L]} |\partial h(t_k, x) / \partial t - \hat{g}^T(t_k) \bar{H}(x)|$ также в зависимости от дискретного времени.

В этих выражениях векторы $\hat{g}(t_k)$ и $\hat{g}(t_k)$ являются составляющими частями вектора

$z_k = z(t_k) = (\hat{g}^T(t_k), \hat{g}^T(t_k))$.

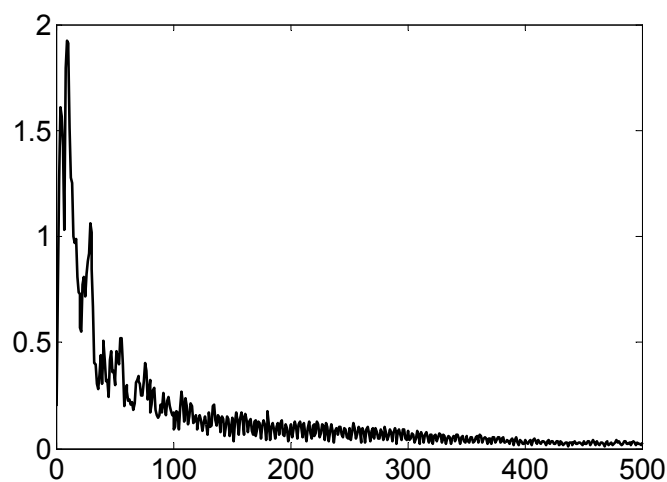


Рис. 4. График ошибки оценки положения струны в зависимости от дискретного времени.

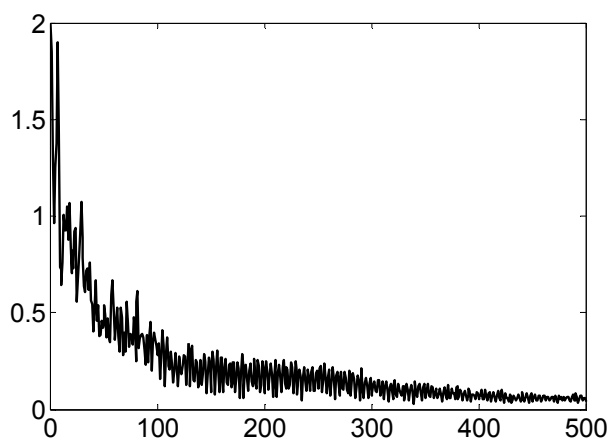


Рис. 5. График ошибки оценки скорости струны в зависимости от дискретного времени.

Приведенные графики демонстрируют хорошую точность оценивания положений и скоростей точек струны.

4. Оценивание положения и скоростей точек мембраны с использованием измерений ее положения вдоль линий

Колебания круглой мембраны в полярных координатах (r, φ) описываются следующим уравнением

$$(33) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} \right), t \in (0, T], (r, \varphi) \in [0, r_0) \times (0, 2\pi]$$

Здесь $h(r, \varphi, t)$ – функция, описывающая отклонение точек мембраны, r_0 – радиус мембраны, a – скорость распространения возмущения, которую считаем постоянной, $a = const$. Будем считать, что граничные условия нулевые

$$(34) \quad h(r, \varphi, t)|_{r=r_0} = h(r_0, \varphi, t) \equiv 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi] \quad \forall t \geq 0.$$

Уравнение (33) имеет единственное решение [27], если заданы также начальные условия

$$(35) \quad h(r, \varphi, 0) = h_0(r, \varphi), \quad \left. \frac{\partial h(r, \varphi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = h_1(r, \varphi),$$

где $h_0(r, \varphi)$ и $h_1(r, \varphi)$ – некоторые функции, которые будем считать неизвестными.

Аналитическое решение (33) при условии (34) и (35) приведено в [27] и его можно представить в виде следующего бесконечного ряда

$$(36) \quad h(r, \varphi, t) = \sum_{m,n} \left(\hat{g}_{mn}(t) \hat{H}_{mn}(r, \varphi) + \check{g}_{mn}(t) \check{H}_{mn}(r, \varphi) \right),$$

где

$$(37) \quad \hat{g}_{mn}(t) = \left(D_{mn}^1 \cos \frac{\mu_n^m at}{r_0} + G_{mn}^1 \sin \frac{\mu_n^m at}{r_0} \right),$$

$$\check{g}_{mn}(t) = \left(D_{mn}^2 \cos \frac{\mu_n^m at}{r_0} + G_{mn}^2 \sin \frac{\mu_n^m at}{r_0} \right).$$

В (36) индексы $m = 0, 1, \dots, n = 1, 2, \dots$, функции

$$(38) \quad \hat{H}_{mn} = \cos m \varphi J_m \left(\frac{\mu_n^m}{r_0} r \right), \quad \check{H}_{mn} = \sin m \varphi J_m \left(\frac{\mu_n^m}{r_0} r \right),$$

являются собственными функциями задачи (33), (34), соответствующие одному собственному значению $\lambda_{mn}^2 = (\mu_n^m / r_0)^2$, $m = 0, 1, \dots, n = 1, 2, \dots$. В выражении (38) $J_m(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода, μ_n^m – n -ый корень уравнения $J_m(\mu_n^m) = 0$. Значения коэффициентов $D_{mn}^1, G_{mn}^1, D_{mn}^2, G_{mn}^2$ в (37) однозначно определяются начальными условиями вида (35). По условию задачи начальные условия неизвестны. Поэтому для получения оценки решения (33)-(35) с помощью выражения (36) требуется получить оценки функций $\hat{g}_{mn}(t)$ и $\check{g}_{mn}(t)$ с использованием измерений.

Следуя классическому методу Галеркина [17, 28], получим дифференциальные уравнения для функций $\hat{g}_{mn}(t)$ и $\check{g}_{mn}(t)$. Для этого (считая коэффициенты $\hat{g}_{mn}(t)$ и $\check{g}_{mn}(t)$ неизвестными) подставим выражение (36) в исходное уравнение (33), умножим полученное равенство последовательно на каждую из функций $\hat{H}_{mn}(r, \varphi)$ и $\check{H}_{mn}(r, \varphi)$ и проинтегрируем каждое такое равенство по области $(r, \varphi) \in [0, r_0) \times (0, 2\pi]$. В результате получим следующие дифференциальные уравнения

$$(39) \quad \frac{d^2 \hat{g}_{mn}(t)}{dt^2} = -a^2 \left(\frac{\mu_n^m}{r_0} \right)^2 \|\hat{H}_{mn}\|^{-2} \hat{g}_{mn}(t),$$

$$\frac{d^2 \tilde{g}_{mn}(t)}{dt^2} = -a^2 \left(\frac{\mu_m^n}{r_0} \right)^2 \| \tilde{H}_{mn} \|^2 \tilde{g}_{mn}(t),$$

где

$$\| \tilde{H}_{mn} \|^2 = \| \tilde{H}_{mn} \|^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \cos^2 m\varphi J_m^2 \left(\frac{\mu_m^n}{r_0} r \right) r dr d\varphi = \frac{r_0^2}{2} \pi \kappa_m [J'_m(\mu_m^n)]^2.$$

Здесь $\kappa_m = 2$, если $m = 0$, и $\kappa_m = 1$, если $m \neq 0$.

Пусть N и M — некоторые фиксированные целые числа. Тогда в качестве оценки функции $h(r, \varphi, t)$ можно взять усеченный ряд вида (36)

$$(40) \quad \tilde{h}(r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \left(\tilde{g}_{mn}(t) \tilde{H}_{mn}(r, \varphi) + \tilde{g}_{mn}(t) \tilde{H}_{mn}(r, \varphi) \right) = g^T(t) H(r, \varphi),$$

где векторы

$$\begin{aligned} g(t) &= (\tilde{g}_{0,1}(t), \dots, \tilde{g}_{0,N}(t), \dots, \tilde{g}_{M,1}(t), \dots, \tilde{g}_{M,N}(t), \\ &\tilde{g}_{1,1}(t), \dots, \tilde{g}_{1,N}(t), \dots, \tilde{g}_{M,1}(t), \dots, \tilde{g}_{M,N}(t))^T, \\ H(r, \varphi) &= (\tilde{H}_{0,1}(r, \varphi), \dots, \tilde{H}_{0,N}(r, \varphi), \dots, \tilde{H}_{M,1}(r, \varphi), \dots, \tilde{H}_{M,N}(r, \varphi), \\ &\tilde{H}_{1,1}(r, \varphi), \dots, \tilde{H}_{1,N}(r, \varphi), \dots, \tilde{H}_{M,1}(r, \varphi), \dots, \tilde{H}_{M,N}(r, \varphi))^T. \end{aligned}$$

Соответственно для оценки скоростей отклонения точек мембраны, функции $v(r, \varphi, t) = \partial h(r, \varphi, t) / \partial t$ можно записать аналогичную оценку

$$(41) \quad \tilde{v}(r, \varphi, t) = \dot{g}^T(t) H(r, \varphi).$$

Пусть число $\varepsilon > 0$ требуемая точность оценивания функций $h(r, \varphi, t)$ и $\partial h(r, \varphi, t) / \partial t$. Тогда для фиксированных начальных условий всегда найдутся такие целые числа N и M , что для оценок $\tilde{h}(r, \varphi, t)$ и $\tilde{v}(r, \varphi, t)$ будут выполняться неравенства

$$(42) \quad \max_{\Omega} |h(r, \varphi, t) - \tilde{h}(r, \varphi, t)| \leq \varepsilon, \quad \max_{\Omega} |\partial h(r, \varphi, t) / \partial t - \tilde{v}(r, \varphi, t)| \leq \varepsilon.$$

Будем считать, что число $\varepsilon > 0$ задано, а соответствующие ему N и M известны. Рассмотрим задачу оценивания векторов $g(t)$ и $\dot{g}(t)$. Для этого перепишем систему уравнений (39) для $m = 0, \dots, M$ и $n = 1, \dots, N$ в следующем векторно-матричном виде

$$(43) \quad \dot{z}(t) = \begin{pmatrix} \Theta & I \\ -\left(\frac{a}{r_0}\right)^2 \text{diag}(\tilde{\Lambda}_0, \dots, \tilde{\Lambda}_M, \check{\Lambda}_1, \dots, \check{\Lambda}_M) & \Theta \end{pmatrix} z(t),$$

где диагональная матрица $\text{diag}(\tilde{\Lambda}_0, \dots, \tilde{\Lambda}_M, \check{\Lambda}_1, \dots, \check{\Lambda}_M)$ составлена из матриц

$$\tilde{\Lambda}_m = \text{diag} \left(\left(\frac{\mu_1^m}{\| \tilde{H}_{1m} \|} \right)^2, \dots, \left(\frac{\mu_N^m}{\| \tilde{H}_{Nm} \|} \right)^2 \right), \quad \check{\Lambda}_m = \text{diag} \left(\left(\frac{\mu_1^m}{\| \tilde{H}_{1m} \|} \right)^2, \dots, \left(\frac{\mu_N^m}{\| \tilde{H}_{Nm} \|} \right)^2 \right), \quad \Theta \text{ и } I —$$

нулевая и единичная матрицы соответствующего размера. Вектор

$$(44) \quad z(t) = (g^T(t), \dot{g}^T(t))^T,$$

Уравнение (43) описывает динамику изменения неизвестных векторов $g(t)$ и $\dot{g}(t)$.

Получим уравнение измерения. Будем считать, что измерения процесса колебания мембраны производится в дискретные моменты времени $t_k = \Delta t \cdot k$, $k = 0, 1, \dots$. Кроме того, рассмотрим случай, когда измеряется только смещение мембраны, т.к. именно этот случай будет рассмотрен при численном моделировании. Пусть в момент времени t_k произведено измерение смещения мембраны в n_y точках с координатами

$(r_{k,s}, \varphi_{k,s})$, $s = \overline{1, n_y}$. Поскольку для разных моментов времени точки могут иметь различные координаты, их значение отмечено индексом k . Тогда в результате мы получаем вектор измерений

$$y_k = (h(r_{k,1}, \varphi_{k,1}, t_k) + \xi_{k,1}, h(r_{k,2}, \varphi_{k,2}, t_k) + \xi_{k,2}, \dots, h(r_{k,n_y}, \varphi_{k,n_y}, t_k) + \xi_{k,n_y})^T.$$

В этом выражении $\xi_{k,s}$ — ограниченная ошибка измерения, $|\xi_{k,s}| \leq c_s$, положительная константа c_s предполагается известной. Выражая в этом равенстве $h(r_{k,i}, \varphi_{k,i}, t_k)$ через $\tilde{h}(r_{k,i}, \varphi_{k,i}, t_k)$ в силу (42), получим

$$y_k = (g^T(t_k)H(r_{k,1}, \varphi_{k,1}) + \varepsilon_{k,1} + \xi_{k,1}, \dots, g^T(t_k)H(r_{k,n_y}, \varphi_{k,n_y}) + \varepsilon_{k,n_y} + \xi_{k,n_y})^T,$$

которое с учетом обозначения (44) можно записать в стандартном виде

$$(45) \quad y_k = C_k^T z_k + \varepsilon_k + \xi_k,$$

где векторы $z_k = z(t_k)$, $\xi_k = (\xi_{k,1}, \dots, \xi_{k,n_y})^T$, $\varepsilon_k = (\varepsilon_{k,1}, \dots, \varepsilon_{k,n_y})^T$, и $n_z \times n_y$ -матрица

$$C_k = \begin{pmatrix} H(r_{k,1}, \varphi_{k,1}) : \dots : H(r_{k,n_y}, \varphi_{k,n_y}) \\ \Theta_{(n_z/2), n_y} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\Theta_{(n_z/2), n_y}$ — нулевая матрица размера $(n_z/2) \times n_y$.

Уравнение (43) в дискретном времени можно записать [31] в виде

$$(46) \quad z_{k+1} = Az_k.$$

Уравнения (46) и (45) являются исходными для решения задачи оценивания вектора состояния $z_k = z(t_k) = (g^T(t_k), \dot{g}^T(t_k))^T$. Поскольку эта задача рассматривается в отсутствие предположений о наличии стохастических свойств у неопределенных величин, то для ее решения предлагается использовать модифицированный метод эллипсоидов, который подробно изложен в [25, 30]. Применение этого метода не требует знания априорных оценок для вектора состояния, также не предполагает априорный анализ наблюдаемости системы.

Перейдем к рассмотрению численного примера. Положим, что радиус мембраны $r_0 = 10$, $a = 1$. Будем считать, что в каждый момент дискретного времени ($\Delta t = 1$) имеются изменения отклонения мембраны в точках, находящихся на прямой линии, касательной с окружности радиуса 2. В каждый следующий момент времени линия поворачивается на угол $\Delta\varphi = \pi/6$, оставаясь касательной к этой окружности. Такие измерения отдаленно подобны спутниковым измерениям, проводимым в полярной области вращающейся планеты. Параметрическое уравнение этой линии (s — параметр) для различных фиксированных моментов времени t можно записать в виде

$$\bar{x}(s, t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -\sin \Delta\varphi \cdot t \\ \cos \Delta\varphi \cdot t \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \cos \Delta\varphi \cdot t \\ \sin \Delta\varphi \cdot t \end{pmatrix}, \quad s \in [-9.798, 9.798], \quad t = t_0, t_1, \dots$$

В качестве точек измерения выберем точки, координаты которых соответствуют целым значениям параметра $s \in [-9:9]$, т.е. получается 19 значений. Точки измерения изображены квадратами на рис. 6.

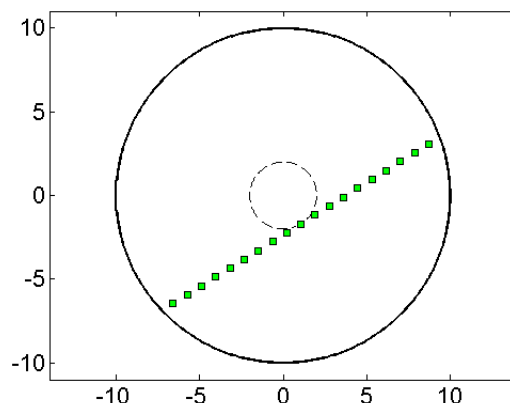


Рис. 6. Точки измерения отклонений мембраны.

Размерность матрицы C_k в этом случае будет $n_z \times 19$.

Для моделирования колебаний мембраны предполагалось, что в начальный момент времени мембрана в некоторой локальной области с координатами $r \in [4, 10]$, $\varphi \in [-\pi/6, \pi/6]$ имеет отклонение от равновесного положения следующего вида

$$(47) \quad h_0(r, \varphi) = 0.5[(r-7)^2((r-7)^2 - 18)/81 + 1][\cos(6\varphi) + 1].$$

Скорости точек мембраны в начальный момент времени нулевые, т.е.

$$(48) \quad \left. \frac{\partial h(r, \varphi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = h_1(r, \varphi) \equiv 0 \quad \forall r \in [0, r_0] \quad \forall \varphi.$$

Эти начальные условия были использованы для вычисления «истинных» положений и скоростей точек мембраны с помощью выражений (36) и (37) для точного решения. При таких начальных условиях коэффициенты в (37) определяются следующими выражениями

$$\begin{aligned} G_{k,n}^1 &\equiv 0, \quad G_{k,n}^2 \equiv 0, \quad D_{m,n}^2 \equiv 0, \\ D_{m,n}^1 &= \frac{0.5}{\|\hat{H}_{mn}\|^2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} [\cos(6\varphi) + 1] \cos(m\varphi) d\varphi \times \\ &\times \int_4^{10} [(r-7)^2((r-7)^2 - 18)/81 + 1] J_m\left(\frac{\mu_n^m}{r_0} r\right) r dr. \end{aligned}$$

В результате, при начальных условиях (47) и (48), положение и скорости точек мембраны можно вычислить с помощью следующих выражений

$$(49) \quad \begin{aligned} h(r, \varphi, t) &= \sum_{m,n} D_{m,n}^1 \cos \frac{\mu_n^m a t}{r_0} \hat{H}_{kn}(r, \varphi) = \sum_{m,n} D_{m,n}^1 \cos \frac{\mu_n^m a t}{r_0} \cos m\varphi J_m\left(\frac{\mu_n^m}{r_0} r\right), \\ \frac{\partial h(r, \varphi, t)}{\partial t} &= -\sum_{m,n} D_{m,n}^1 \frac{\mu_n^m a}{r_0} \sin \frac{\mu_n^m a t}{r_0} \cos m\varphi J_m\left(\frac{\mu_n^m}{r_0} r\right), \end{aligned}$$

где для моделирования было взято $n = \overline{1, 40}$, $m = \overline{0, 40}$. Выражение (49) использовалось для вычисления измеренных значений отклонения мембраны вдоль линии измерения. К «измеренным» таким образом значениям добавлялась помеха, которая генерировалась с помощью датчика равномерно распределенных в интервале $[-0.05, 0.05]$ случайных

чисел. Максимальное значение помехи составляло около 10% от максимального отклонения мембраны.

В рассматриваемом примере при построении уравнений модели (40) и (43) было выбрано $N = 15$ и $M = 15$, при этом величина $\varepsilon = 0.01$, а размерность вектора $z(t)$ получилась равной $n_z = 2 \times N \times (2(M + 1) - 1) = 930$.

С использованием результатов измерений, уравнений (45) и (46), алгоритма оценивания состояния с помощью эллипсоидов [25] в каждый момент дискретного времени строились оценки $\hat{z}_k = \hat{z}(t_k) = (\hat{g}^T(t_k), \hat{g}^T(t_k))^T$ вектора z_k . Эти оценки использовались для вычисления оценок отклонений и скоростей точек мембраны

$$\hat{h}(r, \varphi, t_k) = \hat{g}^T(t_k)H(r, \varphi), \quad \hat{v}(r, \varphi, t_k) = \hat{g}^T(t_k)H(r, \varphi)$$

аналогичным (40) и (41).

На рис. 7 изображен график функции $\hat{h}(r, \varphi, t_k)$ в момент времени $t_k = 160$, а на рис. 8 – график величины отклонения $\hat{h}(r, \varphi, t_k) - h(r, \varphi, t_k)$ этой оценки от аналитического решения для этого же момента времени.

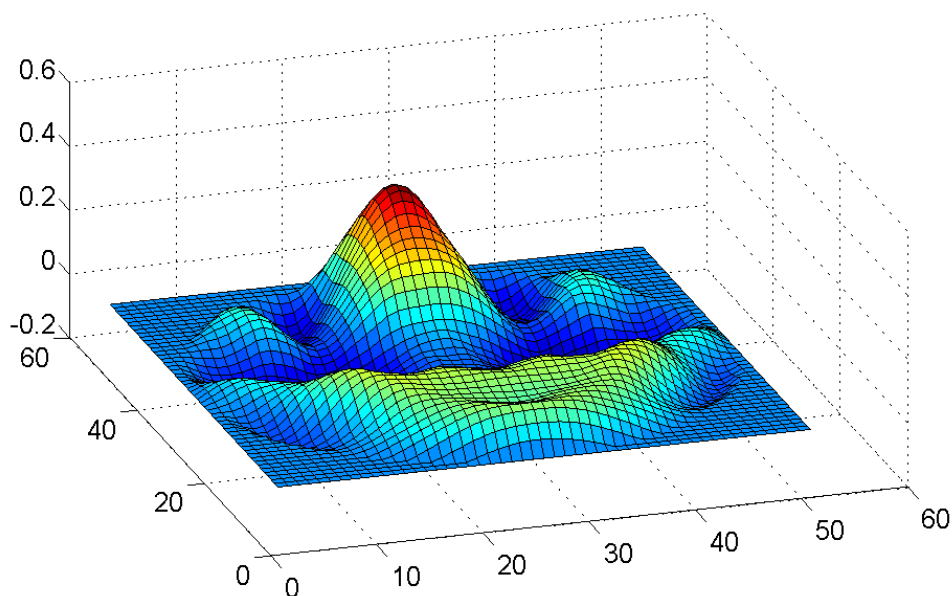


Рис. 7. График оценок смещений точек мембраны в момент дискретного времени $k=160$.

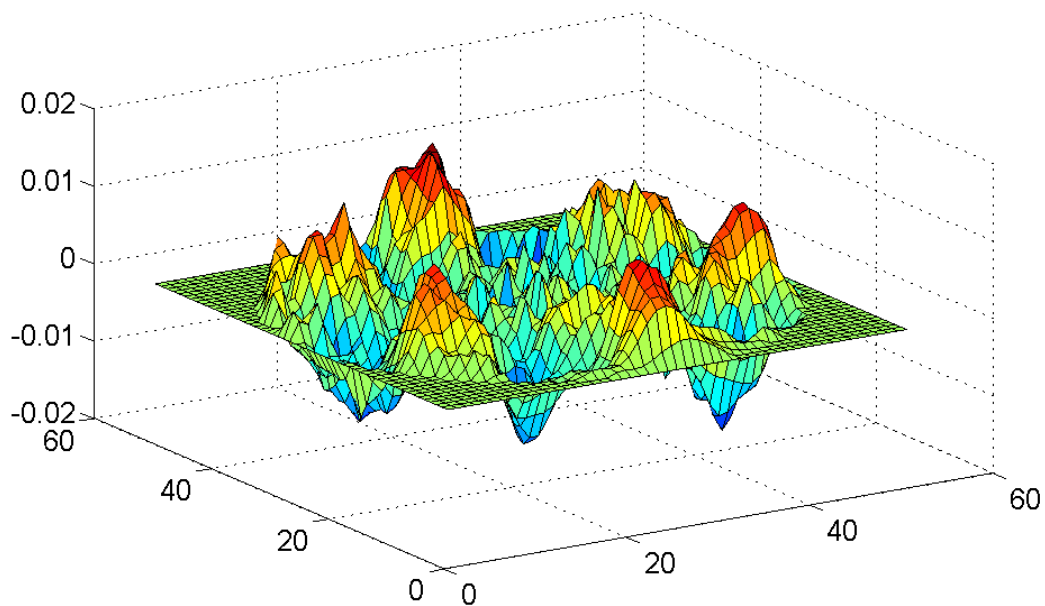


Рис. 8. График ошибок оценок смещений точек мембраны в момент дискретного времени $k=160$.

На рис. 9 и 10 также для момент времени $t_k = 160$ изображены графики функций $\hat{v}(r, \varphi, t_k)$ и $\hat{v}(r, \varphi, t_k) - v(r, \varphi, t_k)$.

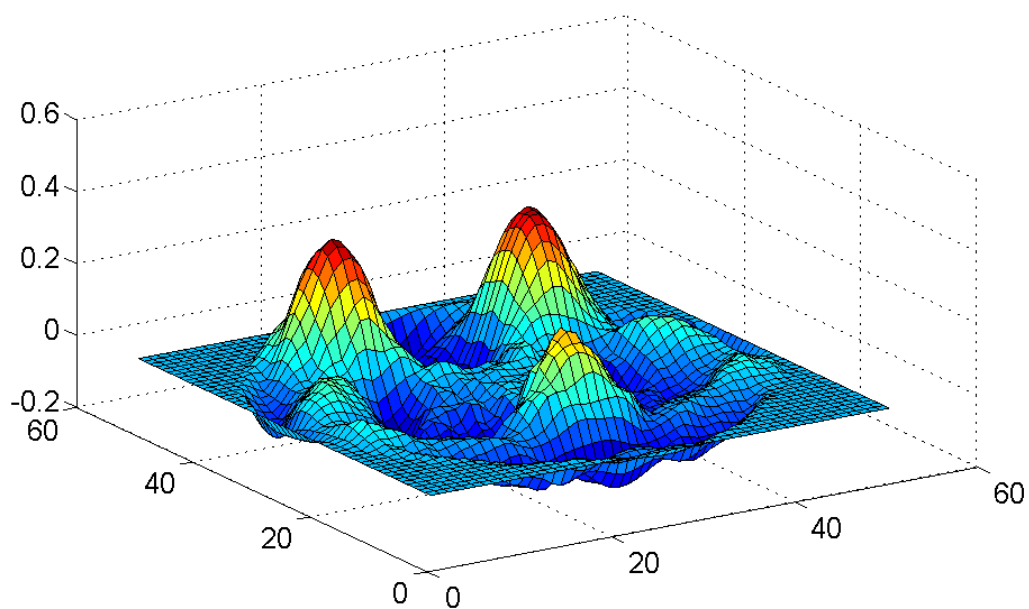


Рис. 9. График оценок скоростей точек мембраны в момент дискретного времени $k=160$.

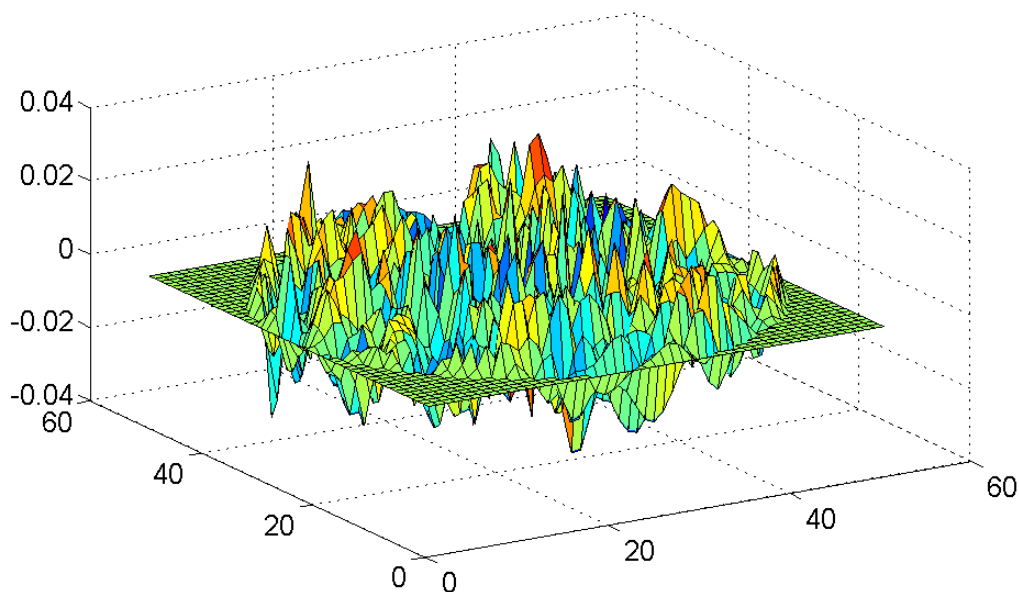


Рис. 10. График ошибок оценок скоростей мембраны в момент дискретного времени $k=160$.

Из рассмотрения рис. 8 и 10 видно, что ошибка оценок функций $h(r, \varphi, t_k)$ и $v(r, \varphi, t_k)$ не превышает величины $4 \cdot 10^{-2}$.

5. Заключение

Изложенная в статье методика восстановления функции или вектора состояния систем с распределенными параметрами может иметь достаточно широкое применение, что связано с универсальностью применения метода Галеркина и Петрова-Галеркина для получения конечно-разностных аппроксимаций для уравнений в частных производных. Вместе с тем, как было указано в примере с оцениванием отклонений и скоростей колеблющейся струны, непосредственное использование этих аппроксимаций в алгоритмах оценивания могут не дать желаемого результата в силу неточности получаемой модели. Иными словами, эти конечно-разностные аппроксимации пригодны для решения прямых задач — получения решения уравнений в частных производных при заданных начальных и граничных условиях, однако в силу своей неточности для собственных мод с большими номерами могут оказаться непригодными для решения обратных задач — восстановления вектора состояния системы. Поэтому требуется дополнительный анализ этих конечномерных моделей и понижение их порядка с целью получения более точных моделей.

Используемый для решения вспомогательной конечномерной задачи оценивания метод эллипсоидов [25] оказался вполне работоспособным и эффективным при размерности вектора состояния около 1000. Численный пример, связанный с мембраной, был рассчитан на персональном компьютере средней производительности.

Полученные результаты требуют более строгого математического обоснования для определения границ применения рассмотренного подхода.

Список литературы

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 320 с.
2. Russell D. Nonharmonic Fourier series in the control theory of distributed parameter systems // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1967. Vol. 18, Issue 3. P. 542-560.
3. Falb P.L. Infinite-dimensional filtering: the Kalman-Bucy Filter in Hilbert Space // *Information and Control*. 1967. Vol. 11, Issues 1-2. P. 102-137.
4. Fattorini H.O. On complete controllability of linear systems // *Journal of Differential Equations*. 1967. Vol. 3, Issue 3. P. 391-402.
5. Balakrishnan A.V., Lions J.L. State estimation for infinite-dimensional systems // *Journal of Control and Computer Sciences*. 1967. No. 11. P. 391-403.
6. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
7. Бутковский А.Г. Структурная теория распределенных систем. М.: Наука, 1977. 320 с.
8. Hidayat Z., Babuska R., De Schutter B., A. Nunez Observers for linear distributed-parameter systems: A survey // *Proceedings of the 2011 IEEE International Symposium on Robotic and Sensors Environments ROSE '2011*. Montreal, Canada. September, 2011. P. 166-171
9. Васильев Ф.П., Куржанский М.А. Потапов М.М., Разгулин А.В. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения. М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, МАКС Пресс, 2010. 384 с.
10. Sawaragi Y., Soeda T. Omatu S. Modelling, Estimation and their application for distributed parameter systems. *Lecture notes in control and information sciences* (Vol. 11). Berlin, New York: Springer, 1978. 269 p.
11. Curtain R.F., Pritchard A.J. Infinite dimensional linear systems theory. Berlin, New York: Springer, 1978. 297 p.
12. Згуровский М.З., Бидюк П.И. Анализ и управление большими космическими конструкциями. Киев: Наукова думка, 1997. 452 с.
13. Vazquez R., Schuster E., Krstic M. Magnetohydrodynamic state estimation with boundary sensors // *Automatica*. 2008. Vol. 44, No. 10. P. 2517-2527.
14. Barje N., Achhab M.E., Wertz V. Observer for Linear Distributed-Parameter Systems with Application to Isothermal Plug-Flow Reactor // *Intelligent Control and Automation*. 2013. No. 4. P. 379-384.
15. Moireau P., Chapelle D., Le Tallec P. Joint state and parameter estimation for distributed mechanical systems // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2008. Vol. 197, No. 6-8. P. 659-677.
16. Ding L., Johansson A., Gustafsson T. Application of reduced models for robust control and state estimation of a distributed parameter system // *Journal of Process Control*. 2009. Vol. 19, No. 3. P. 539-549.
17. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 536 с.
18. Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. 604 p.
19. Fries T.P., Matthies H.G. A Review of Petrov-Galerkin Stabilization Approaches and an Extension to Meshfree Methods. Brunswick: Technische Universität Braunschweig, Informatikbericht-Nr., 2004. 71 p.
20. Schweppe F.C. Uncertain dynamic systems. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1973. 563 p.
21. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
22. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем: метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 320 с.
23. *Bounding Approaches to System Identification* / Ed. By Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter É. New York: Plenum Press, 1996. 567 p.
24. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наук. думка, 2006. 264 с.
25. Сальников Н.Н. Эллипсоидальное оценивание состояний и параметров динамической системы при отсутствии априорной информации об оцениваемых величинах // *Проблемы управления и информатики*. 2014. № 2. С. 144-156.
26. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 504 с.
27. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Издательство МГУ, 2004. 799 с.
28. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 350 с.
29. Медведев С.Ю., Чеботарев Д.О. Метод конечных элементов с базисными функциями специального вида для задач на собственные значения / *Препринты ИПМ*. 2005. № 049. 28 с.

30. Сальников Н.Н. Об одной модификации алгоритма оценивания параметров линейной регрессии с помощью эллипсоидов // Проблемы управления и информатики. 2012. № 2. С. 65-81.
31. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем. М.: Наука, 1985. 296 с.