

УДК [519.254+519.654]:681.5.015

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ МЕТОДОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА КАЧЕСТВА

И.В. Семушин

Ульяновский государственный университет
Россия, 432017, Ульяновск, Льва Толстого ул., 42
E-mail: kentvsem@yandex.ru

Ю.В. Цыганова

Ульяновский государственный университет
Россия, 432017, Ульяновск, Льва Толстого ул., 42
E-mail: jvt.ulsu@gmail.com

Ключевые слова: стохастические дискретные LQG системы, параметрическая идентификация, метод вспомогательного функционала качества, адаптивный ортогонализированный UD-фильтр, матричные ортогональные преобразования, математическая модель суточной термометрии теплового гомеостаза человека.

Рассмотрены вычислительные аспекты рабочей схемы параметрической идентификации дискретных LQG систем методом вспомогательного функционала качества (ВФК), существенные для ее реализации. Для вычисления ВФК и его градиента впервые применен новый устойчивый к ошибкам машинного округления адаптивный расширенный ортогонализированный UD-фильтр. Дан пример параметрической идентификации математической модели суточной термометрии теплового гомеостаза человека с повышенной степенью параметрической неопределенности. Результаты численных экспериментов демонстрируют работоспособность предложенных алгоритмов.

COMPUTATIONAL ASPECTS OF THE PARAMETER IDENTIFICATION BY USE OF THE METHOD OF THE AUXILIARY QUALITY FUNCTIONAL

I.V. Semushin

Ulyanovsk State University
Russia, 432017, Ulyanovsk, L'va Tolstogo Street, 42
E-mail: kentvsem@yandex.ru

Yu.V. Tsyganova

Ulyanovsk State University
Russia, 432017, Ulyanovsk, L'va Tolstogo Street, 42
E-mail: jvt.ulsu@gmail.com

Key words: stochastic discrete LQG systems, parameter identification, method of auxiliary quality functional, adaptive orthogonalized UD-filter, matrix orthogonal transformations, mathematical model of daily thermometry of thermal human homeostasis.

Computational issues of a working scheme of the parametric identification of discrete LQG systems by use of the auxiliary quality functional (AQF), being essential for the implementation, are considered. To calculate the AQF and its gradient, a stable to errors of computer roundoff adaptive extended orthogonalized UD-фильтр is for the first time applied. An example of the parameter identification of a mathematical model of daily thermometry of the thermal human homeostatis with increased degree of parameter uncertainty is given. Results of numerical experiments demonstrates the operability of the algorithms proposed.

1. Введение

В недавней работе [1] детально описана рабочая схема метода вспомогательного функционала качества для параметрической идентификации дискретных LQG систем с управлением и фильтрацией¹. Приведен пример ее применения в области системной биологии для параметрической идентификации математической модели третьего порядка теплового гомеостаза человека.

Согласно существующей терминологии [2], вспомогательный функционал качества (ВФК) — это такой реализуемый показатель качества системы, который подчиняется двум обязательным условиям:

- зависимость ВФК только от процессов, доступных для прямого измерения;
- эквивалентность целей функционирования по исходному (недоступному) и по вспомогательному (доступному) функционалам качества.

Благодаря такому подходу, достигаются два эффекта: (1) идентификация производится на минимум ошибки оценки *состояния*, а не измеряемого *выхода* системы, что интуитивно предпочтительнее известного по Льюнгу метода ошибки предсказания (так как вектор состояния, по определению, является наиболее полной характеристикой внутреннего поведения системы), и (2) вычислительные методы оптимизации в режиме реального времени становятся реализуемы. После формирования ВФК задача сводится к выбору (или построению) сходящегося численного метода.

Чтобы метод ВФК оказался осуществим на практике, к стохастической модели источника данных объективно предъявляются два важных требования:

- модель должна быть задана в дискретном времени;

¹Под аббревиатурой LQG понимают стохастические дискретные системы с *линейными* моделями, *квадратическим* критерием качества и *гауссовыми* помехами.

- модель должна обладать конструктивным (практически проверяемым) свойством полной наблюдаемости.

В отличие от [1], целью данной работы является раскрытие вычислительных аспектов параметрической идентификации методом ВФК, а именно: внедрение в метод ВФК ортогонализированных реализаций адаптивных фильтров, обеспечивающих численную устойчивость к ошибкам машинного округления, и, в частности, построенного в [3] адаптивного расширенного ортогонализированного UD-фильтра.

Все известные в научной литературе реализации UD-фильтра относятся к классу устойчивых к ошибкам машинного округления модификаций дискретного фильтра Калмана (ФК). Их особенность заключается в том, что они основаны на представлении ковариационной матрицы P ошибок оценок вектора состояния LQG системы в виде произведения $U_P D_P U_P^T$, где U — верхняя треугольная матрица с единицами на диагонали, D — диагональная матрица (для любой положительно определенной матрицы такое представление можно получить как результат модифицированного разложения Холецкого [4, 5]). Первой UD-реализацией ФК был последовательный алгоритм Дж. Бирмана [4]. Бирман не только доказал вычислительную эффективность UD-фильтра, но и показал, что при соответствующей программной реализации его алгоритм не сложнее, чем стандартный алгоритм Калмана [6].

Из всех численно эффективных реализаций ФК самыми современными и совершенными являются ортогонализированные блочные алгоритмы. *Ортогонализированными* называют методы, в которых применяют ортогональные преобразования. Подход к построению ортогонализированных блочных алгоритмов предложен Т. Кайлатом (подробное описание в [7]). Именно этот подход к построению адаптивного расширенного ортогонализированного UD-фильтра [3] использован в данной работе. Работа представлена следующим образом.

После формулирования общего решения задачи методом ВФК (разд. 2) проведено испытание результатов внедрения в него современных ортогонализированных алгоритмов. В качестве “полигона” для испытаний выбрана более сложная, по сравнению с [1], задача параметрической идентификации модели суточной термометрии теплового гомеостаза человека (разд. 3), то есть модель размерности не 3, а 4 [8]. На материале этой практически важной задачи раскрыта рабочая схема ВФК-идентификации (разд. 4) и проведены необходимые вычислительные эксперименты (разд. 5). Заключительный раздел 6 формулирует основные теоретические и практические результаты проведенной работы и тем самым раскрывает ее перспективы.

2. Задача параметрической идентификации дискретной LQG системы

Рассмотрим стохастическую систему, принадлежащую классу (1) стохастических дискретных LQG-систем, заданных выражениями

$$(1) \quad \mathfrak{S}(\theta) : \left\{ \begin{array}{l} x_{t+1} = \Phi(\theta)x_t + \Gamma(\theta)w_t, \\ z_{t+1} = H(\theta)x_{t+1} + v_{t+1}; \\ \bar{x}_0(\theta) \triangleq \mathbf{E}\{x_0\}, \\ \Pi_0(\theta) \triangleq \mathbf{E}\{[x_0 - \bar{x}_0(\theta)][x_0 - \bar{x}_0(\theta)]^T\}, \\ \mathbf{E}\{w_t\} = 0, \quad \mathbf{E}\{w_t w_t^T\} = Q(\theta) \geq 0, \\ \mathbf{E}\{v_t\} = 0, \quad \mathbf{E}\{v_t v_t^T\} = R(\theta) > 0; \\ t = 0, \dots, (N-1), \end{array} \right.$$

где $\{w_t\}$ и $\{v_t\}$ — независимые последовательности нормально распределенных случайных векторов, которые не зависят и от случайного начального состояния системы x_0 . Системный векторный параметр $\theta \in \mathbb{R}^p$ принадлежит некоторой области определения Θ . В каждом конкретном случае мы имеем дело с конкретной (заданной) системой $\mathfrak{S}(\hat{\theta})$ из рассматриваемого класса. Обозначим через $\hat{\theta}$ “истинное” значение системного параметра, подлежащего идентификации по имеющимся выходным данным $Z_1^N = [z_1^T \mid \dots \mid z_N^T]^T$.

Предположим, что для систем $\mathfrak{S}(\theta)$ элементы матриц $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $\Pi_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ являются дифференцируемыми функциями параметра θ в точке $\hat{\theta}$, однако, где необходимо, будем упрощать обозначение $\Phi(\theta)$ до Φ и т. д.

С целью оценивания вектора состояния заданной LQG системы рассмотрим линейную динамическую модель $\mathfrak{M}(\theta)$, представленную уравнениями с начальными условиями $g_0 = \bar{x}_0(\theta)$ и $P_0 = \Pi_0(\theta)$ при $t = 0, \dots, (N-1)$:

$$(2) \quad \mathfrak{M}(\theta) : \left\{ \begin{array}{l} \hat{g}_{t+1} = \Phi(\theta)\hat{g}_t + K_{p,t}r_t, \\ r_t = z_t - H\hat{g}_t, \\ K_{p,t} = \Phi(\theta)P_t H^T(\theta)B_{r,t}^{-1}(\theta), \\ B_{r,t} = R(\theta) + H(\theta)P_t H^T(\theta), \\ P_{t+1} = \Phi(\theta)P_t \Phi^T(\theta) + \Gamma(\theta)Q(\theta)\Gamma^T(\theta) - K_{p,t}B_{r,t}K_{p,t}^T. \end{array} \right.$$

Ошибку восстановления (оценивания) вектора состояния x_t системы $\mathfrak{S}(\hat{\theta})$ по модели $\mathfrak{M}(\theta)$ (2) определим как вектор $e_t \triangleq x_t - \hat{g}_t$ с ковариационной матрицей $P_{ee}(t) \triangleq \mathbf{E}\{[e_t - \mathbf{E}\{e_t\}][e_t - \mathbf{E}\{e_t\}]^T\}$.

Теорема 1 ([9]). *Восстановление вектора состояния x_t системы $\mathfrak{S}(\hat{\theta})$ по модели $\mathfrak{M}(\theta)$ (2) является оптимальным для любого момента времени t в смысле минимума критерия средней квадратичной ошибки (СКО – Mean Squared Error, MSE), определенного в виде $J_e(\theta) \triangleq \mathbf{E}\{e_t^T e_t\} = \text{tr}\{P_{ee}(t)\}$ [9], если $\mathfrak{M}(\theta)$ (2) совпадает с $\mathfrak{M}(\hat{\theta})$, то есть с известным дискретным фильтром Калмана (ФК), или иными словами, с обновляющей моделью (innovation*

model) $\mathfrak{M}(\hat{\theta})$ для исходной системы $\mathfrak{S}(\hat{\theta})$, и в этом случае невязка r_t является обновляющей последовательностью v_t — дискретным белым шумом с нулевым математическим ожиданием и ковариацией $HP_tH^T + R$, вычисляемой в модели $\mathfrak{M}(\hat{\theta})$.

Определение 1. Исходный функционал качества (ИФК) для идентификации оптимальной модели $\mathfrak{M}(\theta)$ в классе (2) моделей $\mathfrak{M}(\theta)$, где $\theta \in \Theta$, зависящий от недоступной величины e_t , определим как $J_e(\theta) \triangleq \mathbf{E} \{e_t^T e_t\}$, где $\arg \min_{\theta \in \Theta} J_e(\theta) = \hat{\theta}$.

Определение 2. Два различных функционала (критерия качества), например, $J_e(\theta)$ и $J_\varepsilon(\theta)$, назовем эквимодальными друг другу, если они имеют один и тот же аргумент минимизации: $\arg \min_{\theta \in \Theta} J_e(\theta) = \arg \min_{\theta \in \Theta} J_\varepsilon(\theta)$.

Определение 3. Вспомогательный функционал качества (ВФК) для идентификации оптимальной модели $\mathfrak{M}(\hat{\theta})$ в классе (2) моделей $\mathfrak{M}(\theta)$, где $\theta \in \Theta$, определим как $J_\varepsilon(\theta) \triangleq \mathbf{E} \{\varepsilon_t^T \varepsilon_t\}$, зависящий от доступной величины ε_t , при условии, что $J_e(\theta)$ и $J_\varepsilon(\theta)$ эквимодальные.

Задача 1. Принимая во внимание недоступность ошибки оценивания e_t , и, следовательно, нереализуемость исходного функционала качества $J_e(\theta)$, требуется найти реализуемый ВФК для идентификации оптимальной модели $\mathfrak{M}(\hat{\theta})$ в классе (2) моделей $\mathfrak{M}(\theta)$, где $\theta \in \Theta$.

Решение. Общее решение обозначенной проблемы впервые было дано в [10] и затем подробно изложено в обзоре [11]. Применительно к условиям (1), (2) этот результат имеет следующий вид.

Теорема 2 ([10, 11]). Эквимодальность исходного среднеквадратического функционала ошибки $J_e(\theta) \triangleq \mathbf{E} \{e_t^T e_t\}$ и вспомогательного функционала в виде $J_\varepsilon(\theta) \triangleq \mathbf{E} \{\varepsilon_t^T \varepsilon_t\}$, то есть равенство

$$\hat{\theta} \triangleq \arg \min_{\theta} J_\varepsilon(\theta) = \arg \min_{\theta} J_e(\theta) \triangleq \hat{\theta}$$

по параметру $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ в некотором компактном множестве Θ обеспечивается, если

$$\varepsilon_t \triangleq \varepsilon_t(\theta) = \mathcal{S}(Z_t^{t+\textcircled{s}-1}) - \hat{g}_t,$$

где \textcircled{s} — максимальный индекс наблюдаемости системы, оценка \hat{g}_t получена с помощью модели $\mathfrak{M}(\theta)$ (2) и выходной составной вектор измерений выглядит как

$$Z_t^{t+\textcircled{s}-1} = [z_t^T \mid z_{t+1}^T \mid \dots \mid z_{t+\textcircled{s}-1}^T]^T.$$

Далее рассмотрим вычислительные аспекты метода ВФК. Покажем, как можно применить современный устойчивый адаптивный ортогонализированный UD-алгоритм [3] к вычислению ВФК и его градиента. В качестве примера рассмотрим решение задачи параметрической идентификации дискретной LQG модели четвертого порядка суточной термометрии теплового гомеостаза человека.

3. Дискретная LQG модель суточной термометрии теплового гомеостаза человека

В работе [8] построены несколько вариантов дискретной LQG модели суточной термометрии теплового гомеостаза человека. Здесь рассмотрим один из вариантов, а именно: дискретную LQG модель четвертого порядка 4dDRCM, записанную в соответствии с терминологией [12].

4dDRCM = 4-dimension Discrete-time Real-valued Canonical Model:

$$(3) \quad x_{t+1} = \begin{bmatrix} \cos \omega_n \tau & -\sin \omega_n \tau & 0 & 0 \\ \sin \omega_n \tau & \cos \omega_n \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma \sqrt{1-d^2} \\ 0 \end{bmatrix} w_t$$

$$(4) \quad z_t = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] x_t + v_t,$$

$$(5) \quad x_0 = [1/2, \quad -1/2, \quad 0, \quad u^*]^T,$$

где $d \triangleq e^{-\lambda \tau}$, z_t — измерения температуры тела здорового человека, $\tau \triangleq \Delta t \triangleq t_{i+1} - t_i$ — интервал дискретизации, равный 5 мин, w_t — дискретный гауссовский белый шум с единичной ковариацией ($Q = 1$), $\omega_n = 2\pi/T_n$, $T_n = 24$ ч, v_t — ошибка измерения с нулевым средним и ковариацией $R = (0.125)^2$, $u^* = 36.0$ °C — начальное значение среднесуточного уровня температуры здорового человека (среднесуточный уровень здесь считается неизвестным и включен как четвертый элемент вектора состояния, подлежащий оцениванию в расширяемом таким образом фильтре) и $\dot{\theta} = [\dot{\lambda} \mid \dot{\sigma}]^T$ — вектор неизвестных параметров модели, подлежащий идентификации.

4. Рабочая схема ВФК-идентификации

Как показано в [10, 11], ключевым условием построения ВФК является полная наблюдаемость дискретной системы (1).

4.1. Проверка полной наблюдаемости системы

Система (1) является полностью наблюдаемой тогда и только тогда, когда $\text{rank } W = n$, где $W = [H^T | (H\Phi)^T | \dots | (H\Phi^{\otimes n-1})^T]^T$, $\otimes \geq 1$.

Для проверки данного свойства вычислим частные индексы наблюдаемости p_j [12], $j = 1, \dots, m$ системы (1):

$$(6) \quad p_j = \text{rank} [h_j^T \mid (h_j \Phi)^T \mid \dots \mid (h_j \Phi^{n-1})^T], \\ j = 1, \dots, m-1, \quad p_m = n - (p_1 + \dots + p_{m-1})$$

где h_j обозначает j -ую строку матрицы H . Далее найдем максимальный индекс наблюдаемости $\otimes = \max_{j=1, m} p_j$.

Для модели 4dDRCM (3)–(5) найдем:

$$W = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos \omega_n \tau + \sin \omega_n \tau & \cos \omega_n \tau - \sin \omega_n \tau & d & 1 \\ \cos 2\omega_n \tau + \sin 2\omega_n \tau & \cos 2\omega_n \tau - \sin 2\omega_n \tau & d^2 & 1 \\ \cos 3\omega_n \tau + \sin 3\omega_n \tau & \cos 3\omega_n \tau - \sin 3\omega_n \tau & d^3 & 1 \end{array} \right],$$

$$\det W = 4(1-d) \sin \omega_n \tau [(\cos \omega_n \tau - 1)(d^2 + 1) + d(\cos 2\omega_n \tau + 2 \cos \omega_n \tau)].$$

Поскольку $\text{rank } W \neq 0$, система (3)–(5) является полностью наблюдаемой. Следовательно, $\mathbb{S} = p_1 = 4$. Равенство $\det W \neq 0$ задает область определения Θ параметра θ .

4.2. Дискретная Стандартная Наблюдаемая Модель (ДСНМ)

Для реализации метода ВФК [10, 11] необходимо привести систему (1) и соответствующую ей модель (2) к стандартной наблюдаемой форме, т.е., построить эквивалентную ДСНМ. Для этого запишем матрицу перехода к ДСНМ:

$$(7) \quad W_\star = [h_1^T | \dots | (h_1 \Phi^{p_1-1})^T | \dots | h_m^T | \dots | (h_m \Phi^{p_m-1})^T]^T.$$

Полученная $n \times n$ -матрица является одновременно и матрицей наблюдаемости заданной системы. Отсюда $\det W_\star \neq 0$.

Выполнив преобразование $x^\star = W_\star x$ для (1) и (2), получим

$$(8) \quad \begin{aligned} x_{t+1}^\star &= \Phi_\star x_t^\star + \Gamma_\star w_t, \\ z_{t+1} &= H_\star x_{t+1}^\star + v_{t+1}, \\ \Phi_\star &= W_\star \Phi W_\star^{-1}, \quad \Gamma_\star = W_\star \Gamma, \quad H_\star = H W_\star^{-1}, \end{aligned}$$

где матрица Φ_\star имеет специальную блочную форму [8], а матрица H_\star состоит только из единиц и нулей и, следовательно, не зависит от θ . Применяя (7) и (8) к (3)–(5), получим

4dDSOM = 4-dimension Discrete-time Standard Observable Model:

$$(9) \quad x_{t+1}^\star = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}}_{\Phi_\star} x_t^\star + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \\ d^3 \end{bmatrix}}_{\Gamma_\star} \sigma \sqrt{1-d^2} w_t,$$

$$(10) \quad z_t = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{H_\star} x_t^\star + v_t,$$

$$\begin{aligned} -a_4 &= -d, \\ -a_3 &= 1 + d(2 \cos \omega_n \tau + 1), \\ -a_2 &= -(d+1)(2 \cos \omega_n \tau + 1), \\ -a_1 &= d + 1 + 2 \cos \omega_n \tau, \end{aligned}$$

$$(11) \quad x_0^* = \left[u^* \mid \sin \omega_n \tau + u^* \mid \sin 2\omega_n \tau + u^* \mid \sin 3\omega_n \tau + u^* \right]^T.$$

(Все эти вычисления проведены в системе математических расчетов Maple.)

Замечание 1. В дальнейшем будем рассматривать только дискретную стандартную наблюдаемую модель, и поэтому нижний индекс $*$ для матриц и верхний индекс $*$ для векторов в (8) и в (9)–(11) использовать не будем.

4.3. Реализация алгоритма оценивания вектора состояния LQG системы

Фильтр Калмана $\mathfrak{M}(\hat{\theta})$, так же как и сходная с ним по структуре адаптивная модель $\mathfrak{M}(\theta)$ вида (2), имеют один большой недостаток, а именно: являются численно неустойчивыми по отношению к ошибкам машинного округления (см., например, обсуждение в [13]). Для преодоления этого недостатка разработано множество альтернативных подходов [14]. Среди них положительными качествами выделяются основанные на известных методах факторизации положительно определенных матриц классы ортогонализированных квадратно-корневых алгоритмов и UD-алгоритмы. Как отмечалось, они обладают свойством численной устойчивости по отношению к ошибкам машинного округления, поскольку используют на каждом шаге ортогональные преобразования [14, Chapter 12]. Поэтому от стандартного представления (2) совершим переход на современный, алгебраически эквивалентный стандартному, расширенный ортогонализированный UD-алгоритм, построенный в [15]. Тем самым дадим первую демонстрацию того, каким образом этот алгоритм можно применять для вычисления ВФК и его градиента при решении множества задач параметрической идентификации.

С этой целью перепишем UD-алгоритм [15] в обозначениях (2).

Используем представление любой ковариационной матрицы в виде $P_t = U_{P_t} D_{P_t} U_{P_t}^T$, где U — верхняя треугольная матрица, D — диагональная матрица. Положим $\hat{z}_t = (U_{P_t} D_{P_t})^{-1} \hat{g}_t$, $b_t = (U_{B_{r,t}} D_{B_{r,t}})^{-1} r_t$.

Алгоритм 1 [Расширенный ортогонализированный UD-фильтр]

1. Начальные данные: Вычислить UD-факторы Холецкого $\{U_{P_0}, D_{P_0}\}$, $\{U_R, D_R\}$, $\{U_Q, D_Q\}$. Положить $\hat{z}_0 = (U_{P_0} D_{P_0})^{-1} \bar{x}_0$ и $U_{P_0} = U_{P_0}$, $D_{P_0} = D_{P_0}$.
2. Рекуррентно обновлять $\{U_{P_{t+1}}, D_{P_{t+1}}\}$ и \hat{z}_{t+1} ($t \geq 0$):
 - а) Сформировать блочные матрицы

$$(12) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_t &= \text{diag}\{D_Q, D_{P_t}, D_R\}, \\ \mathcal{A}_t^T &= \begin{bmatrix} 0 & \hat{z}_t^T & -z_t^T (U_R D_R)^{-T} \\ \Gamma U_Q & \Phi U_{P_t} & 0 \\ 0 & H U_{P_t} & U_R \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- б) Для пары $\{\mathcal{A}_t, \mathcal{D}_t\}$ выполнить MWGS-ортогонализацию (модифицированную взвешенную ортогонализацию Грама-Шмидта [5]) столбцов матрицы \mathcal{A}_t относительно весовой матрицы \mathcal{D}_t и получить в

результате пары блочных матриц $\{\mathcal{A}_t^\dagger, \mathcal{D}_t^\dagger\}$:

$$\mathcal{D}_t^\dagger = \text{diag}\{1, D_{P_{t+1}}, D_{B_{r,t}}\}, \quad \mathcal{A}_t^\dagger = \begin{bmatrix} (*) & \hat{z}_{t+1}^\top & b_t^\top \\ 0 & U_{P_{t+1}} & K_{p,t} U_{B_{r,t}} \\ 0 & 0 & U_{B_t} \end{bmatrix}$$

таких, что

$$\mathcal{A}_t^\top = \mathcal{A}_t^\dagger \mathcal{B}_t^\top \quad \text{и} \quad \mathcal{A}_t^\top \mathcal{D}_t \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_t^\dagger \mathcal{D}_t^\dagger (\mathcal{A}_t^\dagger)^\top,$$

где следующие матрицы характеризованы своими размерами и видом:

$$\mathcal{D}_t \in \mathbb{R}^{(q+n+m) \times (q+n+m)},$$

$$\mathcal{A}_t \in \mathbb{R}^{(q+n+m) \times (1+n+m)},$$

$\mathcal{B}_t \in \mathbb{R}^{(q+n+m) \times (1+n+m)}$ — матрица MWGS-преобразования, приводящего к верхней треугольной блочной матрице $\mathcal{A}_t^\dagger \in \mathbb{R}^{(1+n+m) \times (1+n+m)}$ и диагональной матрице $\mathcal{D}_t^\dagger \in \mathbb{R}^{(1+n+m) \times (1+n+m)}$,

(*) — часть матрицы \mathcal{A}_t^\dagger , не представляющая интереса.

Замечание 2. В любой момент времени t доступна оценка вектора состояния

$$(13) \quad \hat{g}_t = (U_{P_t} D_{P_t}) \hat{z}_t.$$

Алгоритм 1 имеет компактную и удобную форму записи, позволяющую единообразно обрабатывать все данные. Такую форму UD-фильтра очень просто реализовать в виде программного кода на ЭВМ. Вычисление оценки вектора состояния (13) не требует операции матричного обращения, подверженной ошибкам машинного округления.

Для того, чтобы избавиться от операции матричного обращения при вычислении величины $-z_t^\top (U_R D_R)^{-\top}$ в блочной матрице (12), ее можно заменить на $-(z_t^*)^\top$, где z_t^* — декоррелированные измерения (см. [16], стр. 240).

Теперь перейдем к построению ВФК.

4.4. Построение вспомогательного функционала качества

В соответствии с [10, с. 109] или [11, р. 274], для построения ВФК запишем вспомогательный процесс ε_t (см. определение 3 и теорему 2):

$$(14) \quad \varepsilon_t \triangleq \varepsilon_t(\theta) = \mathcal{S}(Z_t^{t+\textcircled{s}-1}) - \hat{g}_t,$$

где \textcircled{s} — максимальный индекс наблюдаемости, оценка \hat{g}_t получена с помощью модели $\mathfrak{M}(\theta)$ (2) и выходной составной вектор измерений выглядит как

$$Z_t^{t+\textcircled{s}-1} = [z_t^\top \mid z_{t+1}^\top \mid \dots \mid z_{t+\textcircled{s}-1}^\top]^\top.$$

Как было указано в п. 4.3., и в соответствии с [17, р. 516], специальное матричное преобразование $\mathcal{S}(\cdot)$ выполним в соответствии с определением из [10,

с. 106–107] или [11, pp. 270–271]. Оценки \hat{g}_t будем вычислять с помощью расширенного ортогонализованного UD-фильтра (алгоритм 1). Для этого выразим величины, участвующие в вычислении (14), в терминах алгоритма 1. Воспользуемся выражением (13). Перепишем выражение (14) в виде

$$(15) \quad \varepsilon_t(\theta) = \mathcal{S}(Z_t^{t+\mathbb{S}-1}) - (U_{P_t} D_{P_t}) \hat{z}_t.$$

Рассмотрим ВФК как критерий качества идентификации $J_\varepsilon(\theta) = J(\theta \mid Z_1^N)$ неизвестного параметра θ в соответствии с определением 3. Следуя [11, p. 273], запишем (коэффициент $\frac{1}{2}$ введен для удобства):

$$(16) \quad J_\varepsilon(\theta) \triangleq \frac{1}{2} \mathbf{E} \left\{ \varepsilon_t(\theta)^T \varepsilon_t(\theta) \right\}.$$

Переходя в (16) к выборочному среднему, перепишем (16) в удобном для численной реализации виде:

$$(17) \quad \hat{J}_N^a(\theta) = \frac{1}{2N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t(\theta)^T \varepsilon_t(\theta).$$

Полагая $\mathbb{S} = 4$ в случае модели 4dDSOM (9)–(11), общее выражение для $\mathcal{S}(Z_t^{t+\mathbb{S}-1})$ в (14) и (15) примет вид:

$$(18) \quad \mathcal{S}(Z_t^{t+3}) = \begin{bmatrix} z_t \\ z_{t+1} \\ z_{t+2} \\ z_{t+3} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, построение ВФК для модели 4dDRCM завершено. Новым является выражение (15) для вычисления вспомогательного процесса в терминах алгоритма 1. Теперь для минимизации ВФК можно использовать весь известный аппарат численных методов, что позволит идентифицировать оптимальную модель $\mathfrak{M}(\theta)$ так хорошо, насколько это возможно при данном подходе.

4.5. Минимизация ВФК

Для численной минимизации ВФК будем использовать градиентный метод с заданным начальным значением параметра θ . (Выбор начального значения параметра представляет собой отдельную задачу, которая в данной работе не рассматривается.) Наряду с градиентным методом для минимизации ВФК можно применить и другие методы, в том числе метод Ньютона [18]. Вопрос выбора численного метода для минимизации ВФК также требует отдельного рассмотрения и является одной из задач дальнейших исследований.

Для указанных численных методов запишем общий вид итерационного выражения:

$$(19) \quad \hat{\theta}^{j+1} = \hat{\theta}^j - \beta_j G^{-1}(\hat{\theta}^j) \nabla \hat{J}_N^a(\hat{\theta}^j),$$

где $\hat{\theta}^j$ — значение параметра на j -ой итерации, ∇ обозначает оператор градиента, который применяется здесь к ВФК (17) в точке $\theta = \hat{\theta}^j$, матрица $G(\hat{\theta}^j)$

равна единичной матрице I для градиентного метода и матрице $\nabla^2 \hat{\mathcal{J}}_N^a(\hat{\theta}^j)$ вторых частных производных или гессиану от $\hat{\mathcal{J}}_N^a(\hat{\theta}^j)$ в точке $\theta = \hat{\theta}^j$, для методов ньютоновского типа. Величина шага β_j выбирается таким образом, чтобы удовлетворить неравенству $\hat{\mathcal{J}}_N^a(\hat{\theta}^{j+1}) \leq \hat{\mathcal{J}}_N^a(\hat{\theta}^j) + e$, где e — положительное число, задаваемое различными способами, например, как в [19].

Алгоритм (19) требует построения уравнений чувствительности для вычисления частных производных оценок вектора состояния относительно неизвестных параметров. Стандартным подходом является прямое дифференцирование уравнений модели $\mathfrak{M}(\theta)$, приводящее к набору векторных уравнений, известных как *уравнения чувствительности фильтра* и набору матричных уравнений, известных как *уравнения чувствительности типа Риккати*, — такая версия алгоритма изложена в [1]. Альтернативным подходом для вычисления требуемых для алгоритма (19) величин являются новые устойчивые к ошибкам машинного округления методы на базе ортогонализированных квадратно-корневых ковариационных фильтров [20, 21, 22, 23, 24] или на базе ортогонализированных UD-фильтров [3, 15, 25].

В недавней работе [3] построен новый *адаптивный расширенный ортогонализированный UD-фильтр*. Это название следует понимать так:

- *Адаптивный* — алгоритм позволяет вычислить одновременно как оценки вектора состояния LQG системы, так и необходимые для градиентного метода идентификации частные производные оценок вектора состояния относительно неизвестных параметров.
- *Расширенный* — все вычисляемые в алгоритме величины обрабатываются единообразно, в одном блочном массиве.
- *Ортогонализированный* — алгоритм основан на устойчивом к ошибкам машинного округления MWGS-преобразовании (модифицированном взвешенном ортогональном преобразовании Грама-Шмидта).

Далее покажем, как применить адаптивный расширенный ортогонализированный UD-фильтр для вычисления градиента ВФК, минуя явное дифференцирование ковариационных итераций Риккати, что является одним из главных преимуществ.

4.6. Вычисление градиента ВФК на базе адаптивного расширенного ортогонализированного UD-фильтра

Рассмотрим задачу вычисления градиента ВФК в терминах алгоритма 1. Сначала продифференцируем (17) по θ_i ($i = 1, \dots, p$):

$$(20) \quad \frac{\partial \hat{\mathcal{J}}_N^a(\theta)}{\partial \theta_i} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^T(\theta) \frac{\partial \varepsilon_t(\theta)}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Теперь дифференцируя (15) по θ_i , получим

$$(21) \quad \frac{\partial \varepsilon_t(\theta)}{\partial \theta_i} = - \left[\frac{\partial U_{P_t}}{\partial \theta_i} D_{P_t} + U_{P_t} \frac{\partial D_{P_t}}{\partial \theta_i} \right] \hat{z}_t - (U_{P_t} D_{P_t}) \frac{\partial \hat{z}_t}{\partial \theta_i}.$$

Для вычисления величин $\partial U_{P_t}/\partial\theta_i$, $\partial D_{P_t}/\partial\theta_i$, $\partial\hat{z}_t/\partial\theta_i$ модифицируем адаптивный расширенный ортогонализированный UD-фильтр, построенный в [3]. Сформулируем полученный результат.

Алгоритм 2 [Адаптивный расширенный ортогонализированный UD-фильтр]

0. Задать текущее значение параметра θ равным $\hat{\theta}$.
1. Вычислить $\hat{\Phi} = \Phi(\hat{\theta})$, $\hat{\Gamma} = \Gamma(\hat{\theta})$, $\hat{Q} = Q(\hat{\theta})$, $\hat{R} = R(\hat{\theta})$, $\hat{\Pi}_0 = \Pi_0(\hat{\theta})$, $\hat{x}_0 = \bar{x}_0(\hat{\theta})$.
2. Для $i = 1, \dots, p$ вычислить

$$\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\theta_i} = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta_i}\Big|_{\hat{\theta}}, \quad \frac{\partial\hat{\Gamma}}{\partial\theta_i} = \frac{\partial\Gamma}{\partial\theta_i}\Big|_{\hat{\theta}}, \quad \frac{\partial\hat{Q}}{\partial\theta_i} = \frac{\partial Q}{\partial\theta_i}\Big|_{\hat{\theta}}, \quad \frac{\partial\hat{R}}{\partial\theta_i} = \frac{\partial R}{\partial\theta_i}\Big|_{\hat{\theta}}, \quad \frac{\partial\hat{\Pi}_0}{\partial\theta_i} = \frac{\partial\Pi_0}{\partial\theta_i}\Big|_{\hat{\theta}}, \quad \frac{\partial\hat{x}_0}{\partial\theta_i} = \frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta_i}\Big|_{\hat{\theta}}.$$
3. Вычислить UD-факторы Холецкого $\{U_{\hat{\Pi}_0}, D_{\hat{\Pi}_0}\}$, $\{U_{\hat{R}}, D_{\hat{R}}\}$, $\{U_{\hat{Q}}, D_{\hat{Q}}\}$ и

$$\left\{ \frac{\partial U_{\hat{\Pi}_0}}{\partial\theta_i}, \frac{\partial D_{\hat{\Pi}_0}}{\partial\theta_i} \right\}, \left\{ \frac{\partial U_{\hat{R}}}{\partial\theta_i}, \frac{\partial D_{\hat{R}}}{\partial\theta_i} \right\}, \left\{ \frac{\partial U_{\hat{Q}}}{\partial\theta_i}, \frac{\partial D_{\hat{Q}}}{\partial\theta_i} \right\}; \quad i = 1, \dots, p.$$
4. Установить начальные значения $\hat{z}_0 = (U_{\Pi_0} D_{\Pi_0})^{-1} \hat{x}_0$, $U_{P_0} = U_{\Pi_0}$, $D_{P_0} = D_{\Pi_0}$,

$$\frac{\partial\hat{z}_0}{\partial\theta_i} = (U_{\Pi_0} D_{\Pi_0})^{-1} \left[\frac{\partial\hat{x}_0}{\partial\theta_i} - \frac{\partial(U_{\Pi_0} D_{\Pi_0})}{\partial\theta_i} \hat{z}_0 \right], \quad \frac{\partial U_{P_0}}{\partial\theta_i} = \frac{\partial U_{\hat{\Pi}_0}}{\partial\theta_i}, \quad \frac{\partial D_{P_0}}{\partial\theta_i} = \frac{\partial D_{\hat{\Pi}_0}}{\partial\theta_i}.$$
5. Для $t = 1, \dots, N$ выполнить
6. Провести вычисления по п. 2 алгоритма 2:
7. Заполнить блочные матрицы \mathcal{A}_t и \mathcal{D}_t величинами из пп. 1, 2 и 3;
8. Вычислить элементы блочных матриц \mathcal{A}_t^\dagger и \mathcal{D}_t^\dagger с помощью MWGS-преобразования. Сохранить \mathcal{B}_t , \mathcal{A}_t^\dagger , \mathcal{D}_t^\dagger ;
9. Для каждого θ_i ($i = 1, \dots, p$) вычислить:
10. Заполнить блочные матрицы $\frac{\partial\mathcal{A}_t}{\partial\theta_i}$, $\frac{\partial\mathcal{D}_t}{\partial\theta_i}$ величинами из пп. 1 и 2;
11. Вычислить матрицу $\mathcal{B}_t^\top \mathcal{D}_t \frac{\partial\mathcal{A}_t}{\partial\theta_i} (\mathcal{A}_t^\dagger)^{-\top}$. Разделить ее на части $\bar{L}_0(i)$, $D_0(i)$ и $\bar{U}_0(i)$. Сохранить найденные значения.
12. Вычислить матрицу $\mathcal{B}_t^\top \frac{\partial\mathcal{D}_t}{\partial\theta_i} \mathcal{B}_t$. Разделить ее на части $\bar{U}_2^\top(i)$, $D_2(i)$ and $\bar{U}_2(i)$. Сохранить найденные значения.
13. Вычислить $\frac{\partial\mathcal{A}_t^\dagger}{\partial\theta_i} = \mathcal{A}_t^\dagger [\bar{L}_0^\top(i) + \bar{U}_0(i) + \bar{U}_2(i)] (\mathcal{D}_t^\dagger)^{-1}$.
14. Вычислить $\frac{\partial\mathcal{D}_t^\dagger}{\partial\theta_i} = 2D_0(i) + D_2(i)$.
15. Получить результат:

$$\frac{\partial U_{P_t}}{\partial\theta_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\mathcal{A}_t^\dagger}{\partial\theta_i} \end{bmatrix}_{(1+n):(1+2n)}^{2:(2+n)}, \quad \frac{\partial D_{P_t}}{\partial\theta_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\mathcal{D}_t^\dagger}{\partial\theta_i} \end{bmatrix}_{2:(2+n)}^{2:(2+n)},$$

$$\frac{\partial\hat{z}_t}{\partial\theta_i} = \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial\mathcal{A}_t^\dagger}{\partial\theta_i} \end{bmatrix}_{(1+n):(1+2n)}^{1:1} \right)^\top.$$
16. Конец.

Замечание 3. В п. 15 алгоритма 2 через $[A]_{m:n}^{k:l}$ обозначен матричный блок, расположенный в матрице A на пересечении строк с k -ой по l -ую и столбцов с m -го по n -ый.

Для модели 4dDSOM (9)–(11) найдем аналитические выражения для величин из п. 2 алгоритма 2. При заданном $\theta = [\lambda \mid \sigma]^T$, запишем $\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial R}{\partial \lambda} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial \Pi_0}{\partial \lambda} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial \Pi_0}{\partial \sigma} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \sigma} = \mathbf{0}$ и

$$(22) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau d & -\tau d(2 \cos \omega_n \tau + 1) & \tau d(2 \cos \omega_n \tau + 1) & -\tau d \end{bmatrix},$$

$$(23) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda} = \frac{\tau d \sigma}{\sqrt{1-d^2}} \begin{bmatrix} d \\ -1+2d^2 \\ -2d+3d^3 \\ -3d^2+4d^4 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma} = \sqrt{1-d^2} \begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \\ d^3 \end{bmatrix}.$$

4.7. Схема ВФК-идентификации модели 4dDRCM

Предположим, что для решения задачи параметрической идентификации выбран градиентный метод (19), где $G(\theta^j) = I$. Далее объясним — на примере идентификации модели 4dDRCM — каким образом происходит вычисление оценки $\hat{\theta}^{j+1}$ на $(j+1)$ -ой итерации цикла.

Алгоритм 3 [Процедура ВФК-идентификации]

- ✓ Взять текущую оценку $\hat{\theta}^j$.
- 1° Вычислить значения элементов матриц в (9) в текущей точке $\hat{\theta}^j$: $\hat{\Phi} = \Phi(\hat{\theta}^j)$, $\hat{\Gamma} = \Gamma(\hat{\theta}^j)$ (остальные матрицы не зависят от $\theta = [\lambda \mid \sigma]^T$).
- 2° Вычислить значения частных производных элементов матриц в текущей точке θ^j по выражениям (22), (23).
- 3° Используя выходные данные $Z_1^N = [z_1^T \mid \dots \mid z_N^T]^T$, вычислить ВФК в текущей точке $\hat{\theta}^j$ по выражениям (15), (17), (18), применяя алгоритм 1 и полученные на Шаге 1° результаты.
- 4° Вычислить градиент ВФК в текущей точке $\hat{\theta}^j$ по выражениям (20), (21), применяя алгоритм 2 и полученные на Шаге 2° результаты.
- ✓ Сохранить вычисленные в текущей точке $\hat{\theta}^j$ значения ВФК и его градиента. Выполнить очередную итерацию градиентного метода (19) и найти следующее приближение $\hat{\theta}^{j+1}$. Повторить алгоритм с Шага 1° в точке $\hat{\theta}^{j+1}$. Продолжать до тех пор, пока не будет выполнен заданный критерий остановки.

5. Численные эксперименты

Рассмотрим стохастическую модель 4dDRCM (3)–(5). Экспериментальные условия представлены в табл. 1.

Таблица 1. Экспериментальные условия для идентификации параметра $\theta = [\lambda | \sigma]^T$ и оценивания неизвестного среднего значения u^*

Количество измерений	$N = 2 \times 288$
Интервал измерений (мин)	$\tau = 5$
Истинное значение параметра λ	$\dot{\lambda} = 0.01$
Истинное значение параметра σ	$\dot{\sigma} = 0.3$
Время корреляции модельного шума (мин)	$T_n = 24 \cdot 60, \omega_n = 2\pi/T_n$
Среднесуточная температура	$u^* = 36.0 \text{ }^\circ\text{C}$
Ковариация погрешности измерений	$R = (0.125)^2$
Нач. значение вектора состояния	$x_0 = x_0^* \text{ (11)}$
Нач. значение оценки λ	$\hat{\lambda}_0 = 0.0001$
Нач. значение оценки σ	$\hat{\sigma}_0 = 0.0001$

При заданном (*истинном*) значении системного параметра $\dot{\theta} \neq 0$, смоделирована последовательность из N измерений. Затем полученные данные поделены на две части, каждая из которых представляет собой суточные измерения температуры здорового человека. Первая часть использовалась для идентификации “неизвестного” параметра θ , а вторая — для оценивания вектора состояния системы с найденным значением неизвестного параметра.

Все программные коды написаны на языке `MatLab`. Для минимизации ВФК использован `The MatLab Optimization Toolbox` со встроенной функцией `fmincon`, реализующий метод оптимизации градиентного типа. Для проведения численных экспериментов разработаны `m`-функции с реализацией алгоритма 2 для вычисления ВФК и его градиента. Затем эти функции были встроены в метод `fmincon`. Полученные результаты представлены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты параметрической идентификации модели 4dDRCM

$\dot{\theta}$, истинное значение параметра θ	$[0.01 0.3]^T$
$\hat{\theta}$, полученная оценка	$[0.010373 0.271158]^T$
Относительная погрешность $\ \hat{\theta} - \dot{\theta}\ /\ \dot{\theta}\ $	0.096094

Данные табл. 2 подтверждают приемлемую работоспособность предложенных алгоритмов.

На рис. 1 показаны модельные данные: вторая часть измерений Z_{289}^{576} , график оценки суточной динамики температуры здорового человека $H\hat{g}_t$, график

оценки среднесуточного уровня температуры $\hat{g}_t^{(4)}$ ($t = 289, \dots, 576$). При оценивании в модели 4dDRCM использовались найденные значения параметра $\hat{\theta} = [0.010373 \mid 0.271158]^T$.

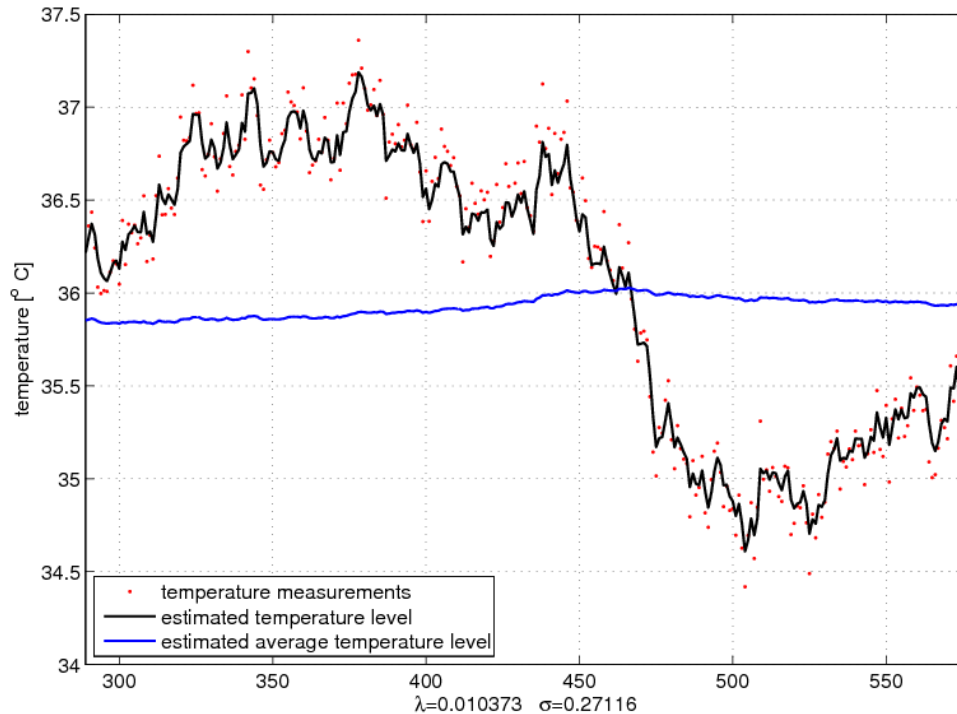


Рис. 1. Параметрическое оценивание по модели 4dDRCM [°C]: (красные точки) — вторая часть измерений Z_{289}^{576} , (черная сплошная линия) — график оценки суточной динамики температуры здорового человека, (синяя сплошная линия) — график оценки среднесуточного уровня температуры.

Представленные на рис. 1 результаты подтверждают способность стохастической модели 4dDRCM (3), (5) воспроизводить циркадный ритм суточной динамики температуры здорового человека.

6. Заключение

В работе рассмотрены вычислительные аспекты рабочей схемы параметрической идентификации дискретных LQG систем методом вспомогательного функционала качества. Перечислим новые результаты, полученные в данной работе:

- Новые выражения для ВФК и его градиента в терминах расширенного ортогонализованного UD-фильтра.
- Модификация построенного в [3] адаптивного расширенного ортогонализованного UD-фильтра с целью его использования в методе ВФК.
- Программная реализация алгоритмов 1, 2 и 3 на языке MatLab.

- Численные эксперименты, демонстрирующие решение задачи параметрической идентификации математической модели четвертого порядка суточной термометрии теплового гомеостаза человека.

Дальнейшие исследования направлены на решение вопросов применимости рассмотренных моделей, методов и алгоритмов для решения задачи параметрической идентификации по реальным данным температурных измерений.

Благодарности

Авторы считают приятным долгом выразить благодарность Российскому Фонду Фундаментальных Исследований за финансовую поддержку, обеспеченную грантом РФФИ (проект № 13-01-97035 р_поволжье_а) в течение 2013–2014 гг.

Отдельная благодарность авторов — доктору медицинских наук, профессору А. Б. Пескову за предоставление данных термометрии, полученных с применением современной аппаратуры в условиях стационара областной клинической больницы г. Ульяновска, — для определения перспектив использования разрабатываемых методов при обработке реальных данных в интересах практической медицины.

Список литературы

1. Семушин И.В., Цыганова Ю.В. Применение метода вспомогательного функционала качества для параметрической идентификации дискретных LQG систем с управлением и фильтрацией // XII Всероссийское Собрание по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014 г.: Труды. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 2696-2707.
2. Семушин И.В. Персональный сайт <http://staff.ulsu.ru/semushin/>.
3. Цыганова Ю.В. Об одном подходе к построению адаптивного UD-фильтра для параметрической идентификации LQG систем // XII Всероссийское Собрание по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014 г.: Труды. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 2741-2751.
4. Bierman G.J. Factorization methods for discrete sequential estimation. New York: Academic Press, 1977. 255 p.
5. Grewal M.S., Andrews A.P. Kalman filtering: theory and practice. New Jersey: Prentice-Hall, 2001. 410 p.
6. Bierman G.J. and Thornton C.L. Numerical Comparison of Kalman Filter Algorithms: Orbit Determination Case Study // Automatica. 1977. Vol. 13. P. 23-35.
7. Kailath T., Sayed A.H., Hassibi B. Linear estimation. New Jersey: Prentice Hall, 2000.
8. Semushin I.V., Tsyganova J.V., Skovikov A.G. Identification of a Simple Homeostasis Stochastic Model Based on Active Principle of Adaptation // In: Proc. 15th Applied Stochastic Models and Data Analysis International Conference ASMDA-2013. June, 2013. P. 775-783.
9. Meditch J.S. Stochastic Optimal Linear Estimation and Control. McGraw Hill, 1969.
10. Семушин И.В. Адаптивное управление стохастическим линейным объектом в условиях неопределенности // Нелинейные динамические системы: качественный анализ и управление: Сборник трудов. М.: ИСА РАН, 1994. Вып. 2. С. 104-110.
11. Semushin I.V. Adaptation in Stochastic Dynamic Systems – Survey and New Results II // Int. J. Communications, Network and System Sciences. 2011. Vol. 4, No. 4. P. 266-285.
12. Maybeck P.S. Stochastic Models, Estimation and Control. Volume 1. New York: Academic Press, 1978.

13. Verhaegen M., Van Dooren P. Numerical aspects of different Kalman filter implementations // IEEE Trans. Automat. Contr. 1986. Vol. AC-31, No. 10. P. 907-917.
14. Kailath T., Sayed A.H., Hassibi B. Linear estimation. New Jersey: Prentice Hall, 2000.
15. Цыганова Ю.В. О методах реализации UD-фильтра // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2013. № 3. С. 85-105.
16. Семушин И.В. Вычислительные методы алгебры и оценивания: учебное пособие. Ульяновск: УлГТУ, 2011. 366 с.
17. Semushin I.V., Tsyganova J.V. Adaptation in Stochastic Dynamic Systems – Survey and New Results IV: Seeking Minimum of API in Parameters of Data // Int. J. Communications, Network and System Sciences. 2013. Vol. 6, No. 12. P. 513-518.
18. Fletcher R. Practical Methods of Optimization. Second Edition. New York: John Wiley & Sons, 2004.
19. Gupta N.K., Mehra R.K. Computational Aspects of Maximum Likelihood Estimation and Reduction in Sensitivity Function Calculations // IEEE Trans. Automat. Contr. 1974. Vol. AC-19, No. 6. P. 774-783.
20. Семушин И.В., Цыганова Ю.В. Адаптивный квадратно-корневой ковариационный алгоритм фильтрации // Автоматизация процессов управления. 2011. № 1 (23). С. 83-87.
21. Kulikova M.V. New square-root algorithms for log-likelihood gradient evaluation // IEEE Trans. Automat. Control. 2009. Vol. AC-54, No. 3. P. 646-651.
22. Цыганова Ю.В. Вычисление градиента вспомогательного функционала качества в задаче параметрической идентификации стохастических систем // АиТ. 2011. № 9. С. 142-160.
23. Цыганова Ю.В., Куликова М.В. Об эффективных методах параметрической идентификации линейных дискретных стохастических систем // АиТ. 2012. № 6. С. 34-51.
24. Куликова М.В., Цыганова Ю.В. Общий подход к построению алгоритмов параметрической идентификации в классе квадратно-корневых фильтров с ортогональными и J-ортогональными преобразованиями // АиТ. 2014. № 8. С. 59-81.
25. Tsyganova J.V., Kulikova M.V. State sensitivity evaluation within UD based array covariance filters // IEEE Trans. Automat. Contr. 2013. Vol. AC-58, No. 11. P. 2944-2950.