

УДК 681.51

# СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ

**В.Д. Юркевич**

*Новосибирский государственный технический университет*  
Россия, 630073, Новосибирск, проспект К. Маркса, 20  
E-mail: [yurkev@mail.ru](mailto:yurkev@mail.ru)

**Ключевые слова:** системы управления, многомерные системы, метод разделения движений.

Обсуждается методика синтеза регуляторов для многомерных обратимых линейных динамических объектов. В основе применяемого подхода к решению задачи синтеза лежит преднамеренное формирование разнотемповых процессов в замкнутой системе, где устойчивость быстрых процессов обеспечивается выбором параметров регулятора, а формируемые медленные процессы соответствуют заданному эталонному уравнению. Предлагаются различные варианты структур алгоритмов управления, в частности, для решения задачи стабилизации выхода и формирования заданных показателей качества переходных процессов в режиме ступенчатого изменения задающего воздействия. Рассмотрены структуры алгоритмов управления для решения задачи синтеза следящих многомерных систем управления. Рассмотрены условия разрешимости задачи формирования заданных процессов на выходе многоканального объекта управления на основе преобразования модели объекта к нормальной канонической форме и последующего выделения и анализа устойчивости уравнений внутренней подсистемы. Приводится пример с результатами численного моделирования.

## SYNTHESIS OF CONTROLLERS FOR MULTIVARIATE SYSTEMS ON THE BASIS OF THE MOTION SEPARATION METHOD

**V.D. Yurkevich**

*Novosibirsk State Technical University*  
Russia, 630073, Novosibirsk, K. Marksa Prospect, 20  
E-mail: [yurkev@mail.ru](mailto:yurkev@mail.ru)

**Key words:** control systems, multivariate systems, motion separation method.

Procedures of the synthesis of controllers for multivariate invertible linear dynamic plants are discussed. In the basis of the applied approach to solve the synthesis problem, intentional forming different-speed processes in the closed-loop system lies, where the stability of fast processes is assured by selecting controller parameters, while forming slow processes correspond to a set reference equation. Different variants of structures of control algorithms are proposed, in particular, to solve the problem of stabilizing the output and forming set indexes of the quality of transients in the mode of stepped changing the reference control. Structures of control algorithms for solving the problem of synthesis tracking multivariate control systems are considered. Conditions of solvability of the problem of forming set processes at the output of a multichannel control plant on the basis of transformation of the plant model to the normal canonical form and subsequent eliciting and analysis of the stability of the internal system equations are considered. An example with results of numerical simulation is presented.

## 1. Введение

С целью формирования желаемых показателей качества переходных процессов и обеспечения автономности каналов управления в многомерных системах могут быть использованы различные методы для компенсации влияния перекрестных связей, например, частотные методы [1-3], полиномиальный подход [4-5], методы синтеза оптимальных систем управления [6],  $H^\infty$  оптимизация [7], круговые частотные неравенства [8], линейно-квадратичная оптимизация [9]. Модальный метод синтеза также широко используется для синтеза многомерных систем управления [10-13]. В задачах синтеза многомерных систем широко применяются методы, в основе которых лежит представление модели объекта управления в виде уравнений в пространстве состояний [14-19], что позволяет использовать алгебраические методы для компенсации перекрестных связей и синтеза регуляторов многомерных систем. Подавление влияния перекрестных связей в многомерных системах может быть достигнуто также на основе применения больших коэффициентов усиления в законе обратной связи [20], что приводит к рассмотрению систем с разнотемповыми процессами [21-25].

Применяемая в данной работе методика синтеза многомерных систем управления основана на преднамеренном формировании разнотемповых процессов в системе управления, где устойчивость быстрых процессов обеспечивается выбором параметров регулятора, а формируемые медленные процессы для каждой компоненты вектора выхода соответствуют заданному эталонному уравнению, что позволяет обеспечить желаемые показатели качества переходных процессов по выходу и автономность каналов управления [26-29]. Необходимо отметить, что важное значение для практических приложений имеют методики синтеза ПИ и ПИД регуляторов, как для одноканальных [30-34], так и для многомерных систем [35-40]. Результаты данной работы в частных случаях дают методику расчета ПИ и ПИД регуляторов для многомерных систем. В статье рассмотрены особенности реализации регуляторов при синтезе систем стабилизации выхода и синтезе следящих многомерных систем управления. Приводится пример с результатами численного моделирования.

## 2. Постановка задачи управления

В данной работе обсуждаются вопросы синтеза систем управления для линейных динамических объектов с математической моделью вида

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f, \\ y = Cx + w, \end{cases}$$

где  $x = [x_1, \dots, x_n]^T$  – недоступный для измерения вектор состояния;  $y = [y_1, \dots, y_m]^T$  – вектор выхода, который доступен для измерения;  $u = [u_1, \dots, u_m]^T$  – вектор управляющих переменных;  $f, w$  – вектора возмущающих воздействий, которые недоступны для измерения,  $f = [f_1, \dots, f_n]^T$ ,  $w = [w_1, \dots, w_m]^T$ .

Обсуждаются две постановки задачи управления. Первая – задача стабилизации выхода и автономизации каналов управления, где требуется обеспечить свойство

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r,$$

Здесь  $r = [r_1, \dots, r_m]^T$  – вектор задающих воздействий (уставок) на входе системы управления, где компоненты вектора  $r$  являются кусочно-постоянными функциями времени  $t$ . Автономность каналов управления соответствует требованию исключить взаимовлияние в каналах управления. Требуется обеспечить формирование заданных показателей качества переходных процессов (время переходного процесса, перерегулирование) при ступенчатом изменении задающего воздействия.

Вторая обсуждаемая постановка задачи управления, это задача синтеза следящей системы управления, где требуется обеспечить в замкнутой системе свойство

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0,$$

Здесь  $e = [e_1, \dots, e_m]^T$  – вектор ошибок реализации задающего воздействия  $r$ , где  $e = r - y$ . Требуется обеспечить минимально возможную величину ошибки воспроизведения функции задающего воздействия  $r$ .

### 3. Условия разрешимости задачи управления

В данном разделе рассматривается случай, когда индексы обратимости для компонент вектора выхода системы (1) могут иметь различные значения. При этом возможность решения обсуждаемой задачи синтеза многоканального регулятора сводится к проверке двух условий: первое – к проверке условий обратимости модели объекта управления (1); второе – к проверке свойства внутренней устойчивости процессов в системе (1) в режиме формирования заданных процессов на выходе.

*Предположение 1.* Пусть модель объекта управления (1) удовлетворяет достаточному условию обратимости [16-19], где  $\alpha_i$  есть индекс обратимости (относительный порядок) для  $i$ -й компоненты вектора выхода.

Из Предположения 1 следует:

$$(4) \quad c_i A^j B = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m; \quad \forall j = 0, \dots, \alpha_i - 2;$$

$$(5) \quad \det B^* \neq 0, \text{ где } B^* = \begin{bmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 A^{\alpha_1 - 1} B \\ \vdots \\ c_m A^{\alpha_m - 1} B \end{bmatrix},$$

Здесь  $c_i$  есть  $i$ -я строка матрицы  $C$ .

С целью анализа свойства внутренней устойчивости системы (1), преобразуем данную систему к нормальной канонической форме [41, 42].

В условиях Предположения 3 из уравнений модели объекта управления (1), учитывая (4) и (5), получаем, что, для  $i$ -й компоненты вектора выхода  $y_i$ , и  $\alpha_i - 1$  ее первых производных справедлива система уравнений

$$(6) \quad \begin{aligned} y_i &= c_i x + w_i, \\ y_i^{(1)} &= c_i A x + c_i f + w_i^{(1)}, \\ y_i^{(2)} &= c_i A^2 x + c_i A f + c_i f^{(1)} + w_i^{(2)}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_i^{(\alpha_i - 1)} &= c_i A^{\alpha_i - 1} x + \sum_{j=0}^{\alpha_i - 2} c_i A^{\alpha_i - 2 - j} f^{(j)} + w_i^{(\alpha_i - 1)}. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$y_{i,0} = y_i, y_{i,1} = y_i^{(1)}, y_{i,2} = y_i^{(2)}, \dots, y_{i,\alpha_i-1} = y_i^{(\alpha_i-1)}.$$

и представим  $m$  систем уравнений вида (6) в следующей форме:

$$(7) \quad \begin{aligned} y_{i,0} - w_i &= c_i x, & i &= 1, \dots, m \\ y_{i,1} - c_i f - w_i^{(1)} &= c_i A x, \\ y_{i,2} - c_i A f - c_i f^{(1)} - w_i^{(2)} &= c_i A^2 x, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_{i,\alpha_i-1} - \sum_{j=0}^{\alpha_i-2} c_i A^{\alpha_i-2-j} f^{(j)} - w_i^{(\alpha_i-1)} &= c_i A^{\alpha_i-1} x. \end{aligned}$$

Система (7) содержит  $l$  уравнений, которые дополняем уравнением для вектора внутренних переменных  $z$ , где

$$(8) \quad z = Q_{m+1} x, \text{ где } z \in R^{n-l}, \quad l = \sum_{i=1}^m \alpha_i.$$

Матрица  $Q_{m+1}$  выбирается из условия

$$\det Q \neq 0, \text{ где } Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \dots \\ Q_m \\ Q_{m+1} \end{bmatrix}, \quad Q_i = \begin{bmatrix} c_i \\ c_i A \\ \dots \\ c_i A^{\alpha_i-1} \end{bmatrix}.$$

Выполним преобразование координат на основе полученной системы  $n$  уравнений (7), (8). В результате, исключая вектор  $x$ , представим модель объекта управления (1) в следующем виде [41]:

$$(9) \quad \begin{aligned} y_{i,0}^{(1)} &= y_{i,1}, \\ y_{i,1}^{(1)} &= y_{i,2}, \\ \dots & \dots \quad i = 1, \dots, m, \\ y_{i,\alpha_i-2}^{(1)} &= y_{i,\alpha_i-1}, \\ y_{i,\alpha_i-1}^{(1)} &= a_{i1}^* Y + a_{i2}^* z + b_i^* u + f_i^y, \\ z^{(1)} &= \tilde{A}_1 Y + \tilde{A}_2 z + \tilde{B}_2 u + f^z, \end{aligned}$$

где  $Y = [Y_1^T, Y_1^T, \dots, Y_m^T]^T, Y_i^T = [y_{i,0}, y_{i,1}, \dots, y_{i,\alpha_i-1}]$ .

Уравнение

$$(10) \quad y_{i,\alpha_i-1}^{(1)} = a_{i1}^* Y + a_{i2}^* z + b_i^* u + f_i^y,$$

в системе (9) есть выражение для  $\alpha_i$ -й производной  $i$ -й компоненты вектора выхода  $y_i$ , которое в исходной системе координат  $x$  имеет вид

$$y_i^{(\alpha_i)} = c_i A^{\alpha_i} x + c_i A^{\alpha_i-1} B u + \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} c_i A^{\alpha_i-1-j} f^{(j)} + w_i^{(\alpha_i)}.$$

Систему из  $m$  уравнений вида (10) представим в векторной форме:

$$(11) \quad y_* = A_1^* Y + A_2^* z + B^* u + f^y,$$

где

$$y_* = \begin{bmatrix} y_1^{(\alpha_1)} \\ \dots \\ y_m^{(\alpha_m)} \end{bmatrix}, A_1^* = \begin{bmatrix} a_{11}^* \\ \dots \\ a_{m1}^* \end{bmatrix}, A_2^* = \begin{bmatrix} a_{12}^* \\ \dots \\ a_{m2}^* \end{bmatrix}, B^* = \begin{bmatrix} b_1^* \\ \dots \\ b_m^* \end{bmatrix}, f^y = \begin{bmatrix} f_1^y \\ \dots \\ f_m^y \end{bmatrix}.$$

Здесь  $y_*$  есть вектор относительных старших производных компонент вектора  $y$  системы (1).

Условия устойчивости процессов по внутренним переменным линейной системы (1) в режиме формирования заданных процессов по выходной переменной  $y$  могут быть легко получены непосредственно из системы (9), путем перехода к рассмотрению уравнений вырожденных движений, возникающих в режиме стабилизации выхода.

Так как внешние возмущения  $f$  и  $w$  не могут повлиять на устойчивость процессов в системе (1), поэтому принимаем их тождественно равными нулю.

Для выделения уравнений вырожденных движений, полагаем  $y(t) \equiv 0 \forall t$ , тогда  $Y(t) \equiv 0 \forall t$ ,  $\dot{Y}(t) \equiv 0 \forall t$ , соответственно  $y_*(t) \equiv 0 \forall t$ .

В результате, из системы уравнений (9), (11) получим

$$(12) \quad \begin{aligned} 0 &= A_2^* z + B^* u, \\ z^{(1)} &= \tilde{A}_2 z + \tilde{B}_2 u, \end{aligned} \quad \text{где } A_2^* = \begin{bmatrix} a_{12}^* \\ \dots \\ a_{m2}^* \end{bmatrix}.$$

Исключая переменную  $u$ , получим уравнения вырожденных движений, возникающих в режиме стабилизации выхода в нуле

$$(13) \quad z^{(1)} = \left[ \tilde{A}_2 - \tilde{B}_2 (B^*)^{-1} A_2^* \right] z$$

*Замечание 1.* В условиях Предположения 1, для устойчивости процессов по внутренним переменным линейной системы (1) в режиме формирования заданных процессов по выходной переменной  $y$  необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы  $\tilde{A}_2 - \tilde{B}_2 (B^*)^{-1} A_2^*$  в системе (13) имели строго-отрицательную вещественную часть [41, 42].

*Предположение 2.* Пусть модель объекта управления (1) удовлетворяет условию внутренней устойчивости, которое дано в Замечании 1.

## 4. Синтез систем стабилизации выхода

### 4.1. Алгоритм управления для стабилизации выхода

Рассмотрим алгоритм управления для многоканальной системы стабилизации выхода объекта управления (1). Сформируем эталонное уравнение (ЭУ) для желаемого поведения  $i$ -й компоненты вектора выхода в виде дифференциального уравнения

$$(14) \quad y_i^{(\alpha_i)} + a_{i,\alpha_i-1}^0 T_i^{-1} y_i^{(\alpha_i-1)} + \dots + a_{i,2}^0 T_i^{2-\alpha_i} y_i^{(2)} + a_{i,1}^0 T_i^{1-\alpha_i} y_i^{(1)} + T_i^{-\alpha_i} y_i = T_i^{-\alpha_i} r_i,$$

где характеристический полином эталонного (желаемого) уравнения (14) имеет вид

$$A_{i,\text{ЭУ}}(s) = s^{\alpha_i} + a_{i,\alpha_i-1}^0 T_i^{-1} s^{\alpha_i-1} + \dots + a_{i,1}^0 T_i^{1-\alpha_i} s + T_i^{-\alpha_i}.$$

Например,  $a_{i,j}^0$  удобно задать в виде коэффициентов бинома Ньютона, тогда

$$A_{i,\text{ЭУ}}(s) = (s + T_i^{-1})^{\alpha_i}.$$

Предлагаемая структура многоканального регулятора состоит из согласующей матрицы  $K_0$  и  $m$  одноканальных регуляторов

$$\begin{aligned}
 (15) \quad & u = K_0 \tilde{u}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \mu_i^{q_i} \tilde{u}_i^{(q_i)} + d_{i,q_i-1} \mu_i^{q_i-1} \tilde{u}_i^{(q_i-1)} + \dots + d_{i,1} \mu_i \tilde{u}_i^{(1)} = \\
 & = \frac{1}{T_i^{\alpha_i}} [r_i - y_i] - \frac{a_{i,1}^0}{T_i^{\alpha_i-1}} y_i^{(1)} - \dots - \frac{a_{i,\alpha_i-1}^0}{T_i} y_i^{(\alpha_i-1)} - y_i^{(\alpha_i)},
 \end{aligned}$$

где  $q_i \geq \alpha_i$ . Коэффициенты  $d_{i,j}$  также можно задать в виде коэффициентов бинома Ньютона. Каждый из одноканальных регуляторов можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 u_i(s) = & \frac{1}{\mu_i (\mu_i^{q_i-1} s^{q_i-1} + d_{i,q_i-1} \mu_i^{q_i-2} s^{q_i-2} + \dots + d_{i,2} \mu_i s + d_{i,1})} \times \\
 & \times \left\{ \frac{a_{i,0}^0}{s} [r_i(s) - y_i(s)] - (s^{n-1} + \dots + a_{i,2}^0 s + a_{i,1}^0) y_i(s) \right\},
 \end{aligned}$$

где  $i = 1, \dots, m$ .

## 4.2. Анализ свойств замкнутой системы управления

Введем новые переменные

$$\bar{u}_{i,1} = \tilde{u}_i, \quad \bar{u}_{i,2} = \mu_i \tilde{u}_i^{(1)}, \quad \bar{u}_{i,3} = \mu_i^2 \tilde{u}_i^{(2)}, \dots, \quad \bar{u}_{i,j}^{(1)} = \mu_i^{j-1} \tilde{u}_i^{(j-1)},$$

где  $j = 1, \dots, q_i$ ;  $i = 1, \dots, m$ , тогда  $\mu_i \bar{u}_{i,j}^{(1)} = \bar{u}_{i,j+1}$ .

Представим уравнения регулятора (15) в виде

$$\begin{aligned}
 (16) \quad & u = K_0 \tilde{u}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \mu_i \bar{u}_{i,1}^{(1)} = \bar{u}_{i,2}, \\
 & \mu_i \bar{u}_{i,2}^{(1)} = \bar{u}_{i,3}, \\
 & \dots \quad \dots \quad \dots \\
 & \mu_i \bar{u}_{i,q_i-1}^{(1)} = \bar{u}_{i,q_i},
 \end{aligned}$$

$$\mu_i \bar{u}_{i,q_i}^{(1)} = -d_{i,1} \bar{u}_{i,2} - \dots - d_{i,q_i-1} \bar{u}_{i,q_i} + \frac{1}{T_i^{\alpha_i}} [r_i - y_{i,0}] - \frac{a_{i,1}^0}{T_i^{\alpha_i-1}} y_{i,1} - \dots - \frac{a_{i,\alpha_i-1}^0}{T_i} y_{i,\alpha_i-1} - y_{i,\alpha_i-1}^{(1)},$$

Таким образом, получаем уравнения замкнутой системы вида (9), (16). С целью упрощения анализа свойств этой системы, полагаем

$$(17) \quad K_0 = (B^*)^{-1}.$$

Тогда уравнения замкнутой системы управления (9),(16) принимают вид

$$y_{i,0}^{(1)} = y_{i,1},$$

$$y_{i,1}^{(1)} = y_{i,2},$$

$$\dots \dots \quad i = 1, \dots, m,$$

$$y_{i,\alpha_i-2}^{(1)} = y_{i,\alpha_i-1},$$

$$y_{i,\alpha_i-1}^{(1)} = a_{i1}^* Y + a_{i2}^* z + \bar{u}_{i,1} + f_i^y,$$

$$z^{(1)} = \tilde{A}_1 Y + \tilde{A}_2 z + \tilde{B}_2 (B^*)^{-1} \tilde{u} + f^z,$$

$$\mu_i \bar{u}_{i,1}^{(1)} = \bar{u}_{i,2},$$

$$\mu_i \bar{u}_{i,2}^{(1)} = \bar{u}_{i,3},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\mu_i \bar{u}_{i,q_i-1}^{(1)} = \bar{u}_{i,q_i},$$

$$(18) \quad \mu_i \bar{u}_{i,q_i}^{(1)} = -d_{i,1} \bar{u}_{i,2} - \dots - d_{i,q_i-1} \bar{u}_{i,q_i} + \frac{1}{T_i^{\alpha_i}} [r_i - y_{i,0}] - \frac{a_{i,1}^0}{T_i^{\alpha_i-1}} y_{i,1} - \dots - \frac{a_{i,\alpha_i-1}^0}{T_i} y_{i,\alpha_i-1} - y_{i,\alpha_i-1}^{(1)},$$

где

$$(19) \quad \tilde{u} = [\bar{u}_{1,1}, \bar{u}_{2,1}, \dots, \bar{u}_{m,1}]^T.$$

Замена  $y_{i,\alpha_i-1}^{(1)}$  в последнем уравнении системы (18) на правую часть уравнения

$$y_{i,\alpha_i-1}^{(1)} = a_{i1}^* Y + a_{i2}^* z + \bar{u}_{i,1} + f_i^y$$

приводит к сингулярно-возмущенной системе дифференциальных уравнений

$$y_{i,0}^{(1)} = y_{i,1},$$

$$y_{i,1}^{(1)} = y_{i,2},$$

$$\dots \dots \quad i = 1, \dots, m,$$

$$y_{i,\alpha_i-2}^{(1)} = y_{i,\alpha_i-1},$$

$$y_{i,\alpha_i-1}^{(1)} = a_{i1}^* Y + a_{i2}^* z + \bar{u}_{i,1} + f_i^y,$$

$$z^{(1)} = \tilde{A}_1 Y + \tilde{A}_2 z + \tilde{B}_2 (B^*)^{-1} \tilde{u} + f^z,$$

$$\mu_i \bar{u}_{i,1}^{(1)} = \bar{u}_{i,2},$$

$$\mu_i \bar{u}_{i,2}^{(1)} = \bar{u}_{i,3},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\mu_i \bar{u}_{i,q_i-1}^{(1)} = \bar{u}_{i,q_i},$$

$$(20) \quad \mu_i \bar{u}_{i,q_i}^{(1)} = -\bar{u}_{i,1} - d_{i,1} \bar{u}_{i,2} - \dots - d_{i,q_i-1} \bar{u}_{i,q_i} + \frac{1}{T_i^{\alpha_i}} [r_i - y_{i,0}] - \frac{a_{i,1}^0}{T_i^{\alpha_i-1}} y_{i,1} - \dots - \frac{a_{i,\alpha_i-1}^0}{T_i} y_{i,\alpha_i-1} - a_{i1}^* Y - a_{i2}^* z - f_i^y,$$

Анализ свойств системы (20) выполняется в соответствии с методом разделения движений путем выделения уравнений для подсистемы быстрых движений (ПБД) и подсистемы медленных движений (ПМД) [21-23].

Из системы (19) получим уравнения для ПБД следующего вида:

$$\begin{aligned}
& \mu_i \bar{u}_{i,1}^{(1)} = \bar{u}_{i,2}, \\
& \mu_i \bar{u}_{i,2}^{(1)} = \bar{u}_{i,3}, \\
& \dots \quad \dots \quad \dots \quad \quad \quad i = 1, \dots, m, \\
(21) \quad & \mu_i \bar{u}_{i,q_i-1}^{(1)} = \bar{u}_{i,q_i}, \\
& \mu_i \bar{u}_{i,q_i}^{(1)} = -\bar{u}_{i,1} - d_{i,1} \bar{u}_{i,2} - \dots - d_{i,q_i-1} \bar{u}_{i,q_i} + \\
& + \frac{1}{T_i^{\alpha_i}} [r_i - y_{i,0}] - \frac{a_{i,1}^0}{T_i^{\alpha_i-1}} y_{i,1} - \dots - \frac{a_{i,\alpha_i-1}^0}{T_i} y_{i,\alpha_i-1} - a_{i1}^* Y - a_{i2}^* z - f_i^y,
\end{aligned}$$

где  $Y, z, f_i^y$  рассматриваются как замороженные переменные на интервале времени переходных процессов в (21).

Отметим, что в силу условия (17), характеристический полином ПБД (21) распадается на произведение характеристических полиномов ПБД  $i$ -х каналов управления

$$A_{\text{ПБД}}(s) = \prod_{i=1}^m A_{i,\text{ПБД}}(s), \text{ где } A_{i,\text{ПБД}}(s) = \mu_i^{q_i} + d_{i,q_i-1} \mu_i^{q_i-1} s^{q_i-1} + \dots + d_{i,1} \mu_i s + 1.$$

С целью обеспечения устойчивости процессов в ПБД, можно задать параметры  $d_{i,j}$  регуляторов в виде коэффициентов бинома Ньютона, тогда получим

$$A_{\text{ПБД}}(s) = \prod_{i=1}^m (\mu_i s + 1)^{q_i}.$$

В условиях предположения устойчивости ПБД (21), будем полагать, что  $\mu_i \rightarrow 0$  для всех  $i = 1, \dots, m$ . Тогда, после затухания быстрых переходных процессов, возникает квазиравновесный режим ПБД (21), которому соответствует управляющее воздействие

$$\begin{aligned}
& \bar{u}_{i,2} = \bar{u}_{i,3} = \dots = \bar{u}_{i,q_i} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\
(22) \quad & \lim_{\mu_i \rightarrow 0} \bar{u}_{i,1}(\mu_i) = \bar{u}_{i,1}^s = \bar{u}_{i,1} = \frac{1}{T_i^{\alpha_i}} [r_i - y_{i,0}] - \frac{a_{i,1}^0}{T_i^{\alpha_i-1}} y_{i,1} - \dots - \frac{a_{i,\alpha_i-1}^0}{T_i} y_{i,\alpha_i-1} - a_{i1}^* Y - a_{i2}^* z - f_i^y,
\end{aligned}$$

Принимая во внимание (17) и (19), запишем систему уравнений (22) в векторном виде

$$(23) \quad \tilde{u}^s = F_* - A_1^* Y - A_2^* z - f^y,$$

где  $\tilde{u}^s = [\bar{u}_{1,1}^s, \bar{u}_{2,1}^s, \dots, \bar{u}_{m,1}^s]^T$ ,  $F_* = [F_1, F_2, \dots, F_m]^T$ ,

$$F_i = \frac{1}{T_i^{\alpha_i}} [r_i - y_{i,0}] - \frac{a_{i,1}^0}{T_i^{\alpha_i-1}} y_{i,1} - \dots - \frac{a_{i,\alpha_i-1}^0}{T_i} y_{i,\alpha_i-1} \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Для квазиравновесного режима ПБД (21) из уравнений (20) следует вырожденная система уравнений



$$\begin{aligned}
& y_{i,0}^{(1)} = y_{i,1}, \\
& y_{i,1}^{(1)} = y_{i,2}, \\
& \dots \dots \quad i = 1, \dots, m, \\
(24) \quad & y_{i,\alpha_i-2}^{(1)} = y_{i,\alpha_i-1}, \\
& y_{i,\alpha_i-1}^{(1)} = a_{i1}^* Y + a_{i2}^* z + \bar{u}_{i,1}^s + f_i^y, \\
& z^{(1)} = \tilde{A}_1 Y + \tilde{A}_2 z + \tilde{B}_2 (B^*)^{-1} \tilde{u}^s + f^z, \\
& 0 = -\bar{u}_{i,1}^s + \frac{1}{T_i^{\alpha_i}} [r_i - y_{i,0}] - \frac{a_{i,1}^0}{T_i^{\alpha_i-1}} y_{i,1} - \dots - \frac{a_{i,\alpha_i-1}^0}{T_i} y_{i,\alpha_i-1} - a_{i1}^* Y - a_{i2}^* z - f_i^y.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание (23), исключаем вектор  $\tilde{u}^s$  в системе (24), в результате получаем уравнения подсистемы медленных движений (ПМД) вида

$$\begin{aligned}
& y_{i,0}^{(1)} = y_{i,1}, \\
& y_{i,1}^{(1)} = y_{i,2}, \\
& \dots \dots \quad i = 1, \dots, m, \\
(25) \quad & y_{i,\alpha_i-2}^{(1)} = y_{i,\alpha_i-1}, \\
& y_{i,\alpha_i-1}^{(1)} = \frac{1}{T_i^{\alpha_i}} [r_i - y_{i,0}] - \frac{a_{i,1}^0}{T_i^{\alpha_i-1}} y_{i,1} - \dots - \frac{a_{i,\alpha_i-1}^0}{T_i} y_{i,\alpha_i-1}, \\
& z^{(1)} = \left[ \tilde{A}_2 - \tilde{B}_2 (B^*)^{-1} A_2^* \right] z + \left[ \tilde{A}_1 - \tilde{B}_2 (B^*)^{-1} A_1^* \right] Y + \tilde{B}_2 (B^*)^{-1} [F_* - f^y] + f^z,
\end{aligned}$$

Характеристический полином ПМД (25) имеет вид

$$A_{\text{ПМД}}(s) = A_{\text{ЭУ}}(s) A_{\text{ВНУТР}}(s),$$

где

$$A_{\text{ВНУТР}}(s) = \det \left( sI_{n-l} - \tilde{A}_2 + \tilde{B}_2 (B^*)^{-1} A_2^* \right), \quad A_{\text{ЭУ}}(s) = \prod_{i=1}^m A_{i,\text{ЭУ}}(s).$$

*Замечание 2.* Для устойчивости внутренней подсистемы необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы  $\tilde{A}_2 - \tilde{B}_2 (B^*)^{-1} A_2^*$  имели строго-отрицательную вещественную часть, что справедливо в соответствии с Предположением 2.

*Замечание 3.* Устойчивость процессов во внутренней подсистеме является достаточным условием ограниченности управляющего воздействия  $\tilde{u}^s$ , соответствующего квазиравновесному режиму ПБД (21).

*Замечание 4.* Расчет параметров многоканального регулятора на основе формирования в замкнутой системе разнотемповых процессов включает следующие этапы:

- 1) Проверка свойства обратимости системы (1) (Предположение 1);
- 2) Проверка свойства внутренней устойчивости системы (1) (Замечание 2);
- 3) Выбор матрицы  $K_0$ , например,  $K_0 = (B^*)^{-1}$ ;
- 4) Выбор коэффициентов  $d_{i,j}$  исходя из требования на демпфирование переходных процессов в ПБД, выбор коэффициентов  $a_{i,j}^0$  исходя из требования на демпфирование переходных процессов по выходным переменным  $y_i$ .

- 5) Выбор постоянных  $T_i$  исходя из требования на желаемое время переходных процессов по выходным переменным  $y_i$  ;
- 6) Выбор постоянных  $\mu_i$  исходя из требования на степень разделения движений между процессами в ПБД и ПМД, например,  $\mu_i \approx T_i / \eta$ , где  $\eta \geq 10$ .

Из уравнений ПМД (25) следует, что поведение каждой  $i$ -й компоненты вектора выхода соответствуют эталонному уравнению (14), соответственно обеспечивается свойство (2) для процессов в ПМД. Таким образом, после затухание быстрых процессов, в замкнутой системе доминируют медленные процессы и при этом формируются желаемые показатели качества переходных процессов по каждой компоненте  $y_i$  и, одновременно, обеспечивается автономность каналов управления.

*Замечание 5.* В системе (18) поведение выхода  $y_i$  в  $i$ -м канале управления описывается уравнением (14), из свойств которого следует, что скоростная ошибка по задающему воздействию  $r_i$  пропорциональна величине параметра  $T_i$  [42, стр. 71].

## 5. Синтез следящих систем управления

### 5.1. Алгоритмы управления для следящей системы

При синтезе высокоточных следящих систем управления для многомерных объектов управления можно рассмотреть два способа уменьшения величины скоростной ошибки по задающему воздействию  $r$ . Первый способ состоит в формировании эталонного уравнения (ЭУ) для желаемого поведения  $i$ -й компоненты вектора выхода  $y_i$  с учетом требования на астатизм заданного порядка

$$(26) \quad \begin{aligned} & y_i^{(\alpha_i)} + a_{i,\alpha_i-1}^0 T_i^{-1} y_i^{(\alpha_i-1)} + \dots + a_{i,2}^0 T_i^{2-\alpha_i} y_i^{(2)} + a_{i,1}^0 T_i^{1-\alpha_i} y_i^{(1)} + T_i^{-\alpha_i} y_i = \\ & = a_{i,\rho_i}^0 T_i^{\rho_i-\alpha_i} r_i^{(\rho_i)} + \dots + a_{i,2}^0 T_i^{2-\alpha_i} r_i^{(2)} + a_{i,1}^0 T_i^{1-\alpha_i} r_i^{(1)} + T_i^{-\alpha_i} r_i \end{aligned}$$

где  $\rho_i < \alpha_i$ . Соответственно, уравнения модифицированного алгоритма управления принимают следующий вид:

$$(27) \quad \begin{aligned} & u = K_0 \tilde{u}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \mu_i^{q_i} \tilde{u}_i^{(q_i)} + d_{i,q_i-1} \mu_i^{q_i-1} \tilde{u}_i^{(q_i-1)} + \dots + d_{i,1} \mu_i \tilde{u}_i^{(1)} \\ & = \frac{1}{T_i^{\alpha_i}} \left\{ T_i^{\alpha_i} y_i^{(\alpha_i)} - a_{i,\alpha_i-1}^0 T_i^{\alpha_i-1} y_i^{(\alpha_i-1)} - \dots - a_{i,2}^0 T_i^2 y_i^{(2)} - a_{i,1}^0 T_i y_i^{(1)} - y_i \right. \\ & \left. + a_{i,\rho_i}^0 T_i^{\rho_i} r_i^{(\rho_i)} + \dots + a_{i,2}^0 T_i^2 r_i^{(2)} + a_{i,1}^0 T_i r_i^{(1)} + r_i \right\} \end{aligned}$$

где  $q_i \geq \alpha_i$ .

Второй способ уменьшения величины скоростной ошибки по задающему воздействию  $r$  состоит в формировании алгоритма управления в виде согласующей матрицы  $K_0$  и  $m$  одноканальных регуляторов (компенсаторов) следующего вида:

$$(28) \quad \begin{aligned} & u = K_0 \tilde{u}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \mu_i^{q_i} \tilde{u}_i^{(q_i)} + d_{i,q_i-1} \mu_i^{q_i-1} \tilde{u}_i^{(q_i-1)} + \dots + d_{i,1} \mu_i \tilde{u}_i^{(1)} = \\ & = \frac{1}{T_i^{\alpha_i}} \left\{ T_i^{\alpha_i} e_i^{(\alpha_i)} + a_{i,\alpha_i-1}^0 T_i^{\alpha_i-1} e_i^{(\alpha_i-1)} + \dots + a_{i,2}^0 T_i^2 e_i^{(2)} + a_{i,1}^0 T_i e_i^{(1)} + e_i \right\} \end{aligned}$$

В данном случае одноканальный регулятор можно записать через передаточную функцию

$$(29) \quad \tilde{u}_i(s) = \frac{B_{i,c}(s)}{A_{i,c}(s)} e_i(s),$$

где

$$A_{i,c}(s) = \mu_i^{q_i} s^{q_i} + d_{i,q_i-1} \mu_i^{q_i-1} s^{q_i-1} + \dots + d_{i,1} \mu_i s,$$

$$B_{i,c}(s) = s^{\alpha_i} + a_{i,\alpha_i-1}^0 T_i^{-1} s^{\alpha_i-1} + \dots + a_{i,2}^0 T_i^{2-\alpha_i} s^2 + a_{i,1}^0 T_i^{1-\alpha_i} s + T_i^{-\alpha_i}.$$

Если задать  $d_{i,j}$  и  $a_{i,j}^0$  в виде коэффициентов бинома Ньютона, из (29) получим

$$(30) \quad \tilde{u}_i(s) = \frac{(s + T_i^{-1})^{\alpha_i}}{(\mu_i s + 1)^{q_i} - 1} e_i(s).$$

## 5.2. Анализ свойств замкнутой системы управления

Полагаем, что система (1) преобразованием координат (7),(8) представлена в виде (9). Анализ свойств замкнутой системы (9),(27) выполняется полностью аналогично предыдущему случаю, как это было показано в п. 4.2. Выражения для характеристических полиномов ПБД и ПМД в данном случае совпадают с соответствующими полиномами для ПБД и ПМД системы (20).

Далее более подробно будет рассмотрена методика анализа свойств следящей многомерной системы вида (9),(28).

Введем новые переменные

$$(31) \quad \begin{aligned} e_{i,0} &= e_i = r_i - y_i = r_i - y_{i,0}, \\ e_{i,1} &= e_i^{(1)} = r_i^{(1)} - y_i^{(1)} = r_i^{(1)} - y_{i,1}, \\ e_{i,2} &= e_i^{(2)} = r_i^{(2)} - y_i^{(2)} = r_i^{(2)} - y_{i,2}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ e_{i,\alpha_i-1} &= e_i^{(\alpha_i-1)} = r_i^{(\alpha_i-1)} - y_i^{(\alpha_i-1)} = r_i^{(\alpha_i-1)} - y_{i,\alpha_i-1}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$(32) \quad R_i^T = [r_i, r_i^{(1)}, \dots, r_i^{(\alpha_i-1)}], \quad R = [R_1^T, R_1^T, \dots, R_m^T]^T,$$

$$(33) \quad E_i^T = [e_{i,0}, e_{i,1}, \dots, e_{i,\alpha_i-1}], \quad E = [E_1^T, E_1^T, \dots, E_m^T]^T.$$

Тогда  $Y = R - E$ . Учитывая (31)-(33), представим (9) в новой системе координат

$$(34) \quad \begin{aligned} e_{i,0}^{(1)} &= e_{i,1}, \\ e_{i,1}^{(1)} &= e_{i,2}, \\ &\dots \dots \dots \quad i = 1, \dots, m, \\ e_{i,\alpha_i-2}^{(1)} &= e_{i,\alpha_i-1}, \\ e_{i,\alpha_i-1}^{(1)} &= r_i^{(\alpha_i)} - a_{i1}^* (R - E) - a_{i2}^* z - b_i^* u - f_i^y, \\ z^{(1)} &= \tilde{A}_1 (R - E) + \tilde{A}_2 z + \tilde{B}_2 u + f^z. \end{aligned}$$

Аналогично (16), представим уравнения регулятора (28) в виде

$$\begin{aligned}
(35) \quad & u = K_0 \tilde{u}, \quad i = 1, \dots, m, \\
& \mu_i \bar{u}_{i,1}^{(1)} = \bar{u}_{i,2}, \\
& \mu_i \bar{u}_{i,2}^{(1)} = \bar{u}_{i,3}, \\
& \dots \quad \dots \quad \dots \\
& \mu_i \bar{u}_{i,q_i-1}^{(1)} = \bar{u}_{i,q_i}, \\
& \mu_i \bar{u}_{i,q_i}^{(1)} = -d_{i,1} \bar{u}_{i,2} - \dots - d_{i,q_i-1} \bar{u}_{i,q_i} + \frac{1}{T_i^{\alpha_i}} e_{i,0} + \frac{a_{i,1}^0}{T_i^{\alpha_i-1}} e_{i,1} + \dots + \frac{a_{i,\alpha_i-1}^0}{T_i} e_{i,\alpha_i-1} + e_{i,\alpha_i-1}^{(1)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем уравнения замкнутой системы вида (34),(35). С целью упрощения анализа свойств этой системы, полагаем, что матрица  $K_0$  выбрана вида (17). Тогда замкнутая система управления (34), (35) принимает вид

$$\begin{aligned}
(36) \quad & e_{i,0}^{(1)} = e_{i,1}, \\
& e_{i,1}^{(1)} = e_{i,2}, \\
& \dots \quad \dots \quad i = 1, \dots, m, \\
& e_{i,\alpha_i-2}^{(1)} = e_{i,\alpha_i-1}, \\
& e_{i,\alpha_i-1}^{(1)} = r_i^{(\alpha_i)} - a_{i1}^*(R-E) - a_{i2}^* z - \bar{u}_{i,1} - f_i^y, \\
& z^{(1)} = \tilde{A}_1 (R-E) + \tilde{A}_2 z + \tilde{B}_2 (B^*)^{-1} \tilde{u} + f^z, \\
& \mu_i \bar{u}_{i,1}^{(1)} = \bar{u}_{i,2}, \\
& \mu_i \bar{u}_{i,2}^{(1)} = \bar{u}_{i,3}, \\
& \dots \quad \dots \quad \dots \\
& \mu_i \bar{u}_{i,q_i-1}^{(1)} = \bar{u}_{i,q_i}, \\
& \mu_i \bar{u}_{i,q_i}^{(1)} = -d_{i,1} \bar{u}_{i,2} - \dots - d_{i,q_i-1} \bar{u}_{i,q_i} + \frac{1}{T_i^{\alpha_i}} e_{i,0} + \frac{a_{i,1}^0}{T_i^{\alpha_i-1}} e_{i,1} + \dots + \frac{a_{i,\alpha_i-1}^0}{T_i} e_{i,\alpha_i-1} + e_{i,\alpha_i-1}^{(1)},
\end{aligned}$$

где  $\tilde{u} = [\bar{u}_{1,1}, \bar{u}_{2,1}, \dots, \bar{u}_{m,1}]^T$ . Замена  $e_{i,\alpha_i-1}^{(1)}$  в последнем уравнении системы (36) на правую часть уравнения  $e_{i,\alpha_i-1}^{(1)} = r_i^{(\alpha_i)} - a_{i1}^*(R-E) - a_{i2}^* z - \bar{u}_{i,1} - f_i^y$ , приводит к сингулярно-возмущенной системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
e_{i,0}^{(1)} &= e_{i,1}, \\
e_{i,1}^{(1)} &= e_{i,2}, \\
&\dots \dots \dots i=1, \dots, m, \\
e_{i,\alpha_i-2}^{(1)} &= e_{i,\alpha_i-1}, \\
e_{i,\alpha_i-1}^{(1)} &= r_i^{(\alpha_i)} - a_{i1}^*(R-E) - a_{i2}^*z - \bar{u}_{i,1} - f_i^y, \\
z^{(1)} &= \tilde{A}_1(R-E) + \tilde{A}_2z + \tilde{B}_2(B^*)^{-1}\tilde{u} + f^z, \\
\mu_i \bar{u}_{i,1}^{(1)} &= \bar{u}_{i,2}, \\
\mu_i \bar{u}_{i,2}^{(1)} &= \bar{u}_{i,3}, \\
&\dots \dots \dots \\
\mu_i \bar{u}_{i,q_i-1}^{(1)} &= \bar{u}_{i,q_i}, \\
\mu_i \bar{u}_{i,q_i}^{(1)} &= -\bar{u}_{i,1} - d_{i,1}\bar{u}_{i,2} - \dots - d_{i,q_i-1}\bar{u}_{i,q_i} + \\
(37) \quad &+ \frac{1}{T_i^{\alpha_i}} e_{i,0} + \frac{a_{i,1}^0}{T_i^{\alpha_i-1}} e_{i,1} + \dots + \frac{a_{i,\alpha_i-1}^0}{T_i} e_{i,\alpha_i-1} + r_i^{(\alpha_i)} - a_{i1}^*(R-E) - a_{i2}^*z - f_i^y,
\end{aligned}$$

где  $\tilde{u} = [\bar{u}_{1,1}, \bar{u}_{2,1}, \dots, \bar{u}_{m,1}]^T$ . Анализ свойств системы (37) выполняется в соответствии с методом разделения движений путем выделения уравнений ПБД и ПМД. Из системы (37) получим уравнения для ПБД вида

$$\begin{aligned}
\mu_i \bar{u}_{i,1}^{(1)} &= \bar{u}_{i,2}, \\
\mu_i \bar{u}_{i,2}^{(1)} &= \bar{u}_{i,3}, \\
&\dots \dots \dots \\
(38) \quad \mu_i \bar{u}_{i,q_i-1}^{(1)} &= \bar{u}_{i,q_i}, \\
\mu_i \bar{u}_{i,q_i}^{(1)} &= -\bar{u}_{i,1} - d_{i,1}\bar{u}_{i,2} - \dots - d_{i,q_i-1}\bar{u}_{i,q_i} + \\
&+ \frac{1}{T_i^{\alpha_i}} e_{i,0} + \frac{a_{i,1}^0}{T_i^{\alpha_i-1}} e_{i,1} + \dots + \frac{a_{i,\alpha_i-1}^0}{T_i} e_{i,\alpha_i-1} + r_i^{(\alpha_i)} - a_{i1}^*(R-E) - a_{i2}^*z - f_i^y,
\end{aligned}$$

где  $r_i^{(\alpha_i)}, R, E, z, f_i^y$  рассматриваются как замороженные переменные на интервале времени переходных процессов в (38).

Отметим, что характеристический полином ПБД (38) совпадает с характеристический полином ПБД (21).

В условиях предположения устойчивости ПБД (38), где  $\mu_i \rightarrow 0$  для всех  $i=1, \dots, m$ , квазиравновесному режиму ПБД (38) соответствует управляющее воздействие вида

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{i,2} = \bar{u}_{i,3} = \dots = \bar{u}_{i,q_i} &= 0, \quad \forall i=1, \dots, m, \\
(39) \quad \lim_{\mu_i \rightarrow 0} \bar{u}_{i,1}(\mu_i) &= \bar{u}_{i,1}^s = \frac{1}{T_i^{\alpha_i}} e_{i,0} + \frac{a_{i,1}^0}{T_i^{\alpha_i-1}} e_{i,1} + \dots + \frac{a_{i,\alpha_i-1}^0}{T_i} e_{i,\alpha_i-1} + r_i^{(\alpha_i)} - a_{i1}^*(R-E) - a_{i2}^*z - f_i^y.
\end{aligned}$$

Аналогично (23), запишем систему уравнений (39) в виде

$$(40) \quad \tilde{u}^s = \bar{F}_* - A_1^*(R-E) - A_2^*z - f^y,$$

где  $\tilde{u}^s = [\bar{u}_{1,1}^s, \bar{u}_{2,1}^s, \dots, \bar{u}_{m,1}^s]^T$ ,  $\bar{F}_* = [\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_m]^T$ ,

$$\bar{F}_i = \frac{1}{T_i^{\alpha_i}} e_{i,0} + \frac{a_{i,1}^0}{T_i^{\alpha_i-1}} e_{i,1} + \dots + \frac{a_{i,\alpha_i-1}^0}{T_i} e_{i,\alpha_i-1} + r_i^{(\alpha_i)} \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Для квазиравновесного режима ПБД (38) из уравнений (37) следует вырожденная система уравнений

$$(41) \quad \begin{aligned} e_{i,0}^{(1)} &= e_{i,1}, \\ e_{i,1}^{(1)} &= e_{i,2}, \\ &\dots \dots \quad i = 1, \dots, m, \\ e_{i,\alpha_i-2}^{(1)} &= e_{i,\alpha_i-1}, \\ e_{i,\alpha_i-1}^{(1)} &= r_i^{(\alpha_i)} - a_{i1}^*(R-E) - a_{i2}^*z - \bar{u}_{i,1}^s - f_i^y, \\ z^{(1)} &= \tilde{A}_1(R-E) + \tilde{A}_2z + \tilde{B}_2(B^*)^{-1}\bar{u}^s + f^z, \\ 0 &= -\bar{u}_{i,1}^s + \frac{1}{T_i^{\alpha_i}} e_{i,0} + \frac{a_{i,1}^0}{T_i^{\alpha_i-1}} e_{i,1} + \dots + \frac{a_{i,\alpha_i-1}^0}{T_i} e_{i,\alpha_i-1} + r_i^{(\alpha_i)} - a_{i1}^*(R-E) - a_{i2}^*z - f_i^y. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (40), исключаем вектор  $\bar{u}^s$  в системе (41), в результате получаем уравнения подсистемы медленных движений (ПМД) вида

$$(42) \quad \begin{aligned} e_{i,0}^{(1)} &= e_{i,1}, \\ e_{i,1}^{(1)} &= e_{i,2}, \\ &\dots \dots \quad i = 1, \dots, m, \\ e_{i,\alpha_i-2}^{(1)} &= e_{i,\alpha_i-1}, \\ e_{i,\alpha_i-1}^{(1)} &= -\frac{1}{T_i^{\alpha_i}} e_{i,0} - \frac{a_{i,1}^0}{T_i^{\alpha_i-1}} e_{i,1} - \dots - \frac{a_{i,\alpha_i-1}^0}{T_i} e_{i,\alpha_i-1}, \\ z^{(1)} &= \left[ \tilde{A}_2 - \tilde{B}_2(B^*)^{-1}A_2^* \right] z + \left[ \tilde{A}_1 - \tilde{B}_2(B^*)^{-1}A_1^* \right] (R-E) + \tilde{B}_2(B^*)^{-1} [\bar{F}_* - f^y] + f^z, \end{aligned}$$

Характеристические полиномы для ПМД (42) и ПМД (25) совпадают.

*Замечание 6.* Из системы (42) следует, что поведение ошибки  $e_i$  в  $i$ -м канале управления описывается уравнением

$$T_i^{\alpha_i} e_i^{(\alpha_i)} + a_{i,\alpha_i-1}^0 T_i^{\alpha_i-1} e_i^{(\alpha_i-1)} + \dots + a_{i,2}^0 T_i^2 e_i^{(2)} + a_{i,1}^0 T_i e_i^{(1)} + e_i = 0.$$

Свойства данного уравнения проявляются в реакции ошибки  $e_i$  на изменение внешних возмущений или начальных условий объекта управления (1). В тоже время, вид реакции ошибки  $e_i$  на изменение задающего воздействия  $r_i$  определяется свойствами ПБД (38). При этом скоростная ошибка в  $i$ -м канале управления по задающему воздействию  $r_i$  пропорциональна величине параметра  $\mu_i$  [42, стр. 71].

## 6. Пример

Рассмотрим пример, где модель объекта управления (1) имеют вид

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= 2x_2 - x_3 + x_4 + 2u_2 + f_1, \\
 \dot{x}_2 &= 2x_1 + 2x_3 - 2x_4 + 2u_1 + u_2 + f_2, \quad y_1 = 1.5x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 - x_4, \\
 \dot{x}_3 &= -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + u_2 + f_3, \quad y_2 = 0.5x_1 + 0.5x_2 - 0.5x_3, \\
 \dot{x}_4 &= -x_1 + x_2 + 2x_4 + u_1 + 4u_2 + f_4.
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

где  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ ,  $y = [y_1, y_2]^T$ ,  $u = [u_1, u_2]^T$ ,  $n = 4$ ,  $m = 2$ . С целью проверки свойства обратимости системы (43), вычислим

$$\begin{aligned}
 y_{1,0} &= y_1, \\
 y_{1,1} &= \dot{y}_1 = 1.5\dot{x}_1 + 0.5\dot{x}_2 + 0.5\dot{x}_3 - \dot{x}_4 = \\
 &= x_1 + x_2 - x_4 + \bar{f}_2, \quad \text{где } \bar{f}_2 = 1.5f_1 + 0.5f_2 + 0.5f_3 - f_4, \\
 \dot{y}_{1,1} &= \ddot{y}_1 = 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + u_1 - u_2 + f_1 + f_2 - f_4 + \dot{\bar{f}}_2, \\
 y_{2,0} &= y_2, \\
 y_{2,1} &= \dot{y}_2 = 0.5\dot{x}_1 + 0.5\dot{x}_2 + 0.5\dot{x}_3 = \\
 &= 2x_1 + 2x_2 - x_4 + u_1 + u_2 + 0.5f_1 + 0.5f_2 - 0.5f_3.
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

Из соотношений (44) следует, что индексы обратимости (относительные порядки для компонент вектора выхода) равны следующим величинам:  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 1$ . Система (43) является обратимой, так как

$$B^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \det B^* = 2 \neq 0.$$

С целью проверки свойства внутренней устойчивости системы (43) на основе ее преобразования к канонической форме (9), сформируем матрицу  $Q$ . Из соотношений (44) следует:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 & 0.5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, Q_2 = [0.5 \quad 0.5 \quad -0.5 \quad 0].$$

Выбираем  $Q_{m+1} = Q_3 = [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$ . В результате получаем матрицу  $Q$  вида

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 & 0.5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \det Q = -0.5 \neq 0.$$

В соответствии с уравнениями (44), получаем, что система уравнений (6) имеет вид

$$\begin{bmatrix} y_{1,0} \\ y_{1,1} \\ y_{2,0} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 & 0.5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\bar{f}}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \tag{45}$$

Выполняя преобразование координат на основе соотношений (45), получим каноническое представление для системы (43) следующего вида:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{1,0} \\ \dot{y}_{1,1} \\ \dot{y}_{2,0} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,0} \\ y_{1,1} \\ y_{2,0} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\bar{f}}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \tag{46}$$

С целью выделения собственной матрицы внутренней подсистемы, из уравнений (46) получаем

$$A_2^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = 1, \quad \tilde{B}_2 = [1 \quad 4], \quad (B^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

Тогда  $\tilde{A}_2 - \tilde{B}_2 (B^*)^{-1} A_2^* = -1$ , соответственно

$$A_{\text{ВНУТР}}(s) = \det(sI_{n-l} - \tilde{A}_2 + \tilde{B}_2 (B^*)^{-1} A_2^*) = s + 1.$$

Таким образом, внутренняя подсистема является устойчивой. В результате показано, что система (43) удовлетворяет условию обратимости и обладает свойством внутренней устойчивости процессов в пространстве состояний в режиме стабилизации выхода системы (и в режиме формирования заданной траектории движения выхода). Следовательно, для системы (43) можно применять рассмотренный выше метод синтеза алгоритма управления.

В соответствии с (15), структуру алгоритма стабилизации выхода системы (43) можно принять следующего вида:

$$(47) \quad u = K_0 \tilde{u}, \quad K_0 = (B^*)^{-1},$$

$$\mu_1^2 \tilde{u}_1^{(2)} + d_{1,1} \mu_1 \tilde{u}_1^{(1)} = \frac{1}{T_1^2} [r_1 - y_1] - \frac{a_{1,1}^0}{T_1} y_1^{(1)} - y_1^{(2)}, \quad \mu_2 \tilde{u}_2^{(1)} = \frac{1}{T_2} [r_2 - y_2] - y_2^{(1)}.$$

В соответствии с (27), с целью уменьшения величины скоростной ошибки для первого канала управления в режиме слежения, структуру алгоритма управления можно принять следующего вида:

$$(48) \quad u = K_0 \tilde{u}, \quad K_0 = (B^*)^{-1},$$

$$\mu_1^2 \tilde{u}_1^{(2)} + d_{1,1} \mu_1 \tilde{u}_1^{(1)} = \frac{1}{T_1^2} [r_1 - y_1] + \frac{a_{1,1}^0}{T_1} r_1^{(1)} - \frac{a_{1,1}^0}{T_1} y_1^{(1)} - y_1^{(2)}, \quad \mu_2 \tilde{u}_2^{(1)} = \frac{1}{T_2} [r_2 - y_2] - y_2^{(1)}.$$

В соответствии с (28), структуру алгоритма управления в следящей системе можно принять следующего вида:

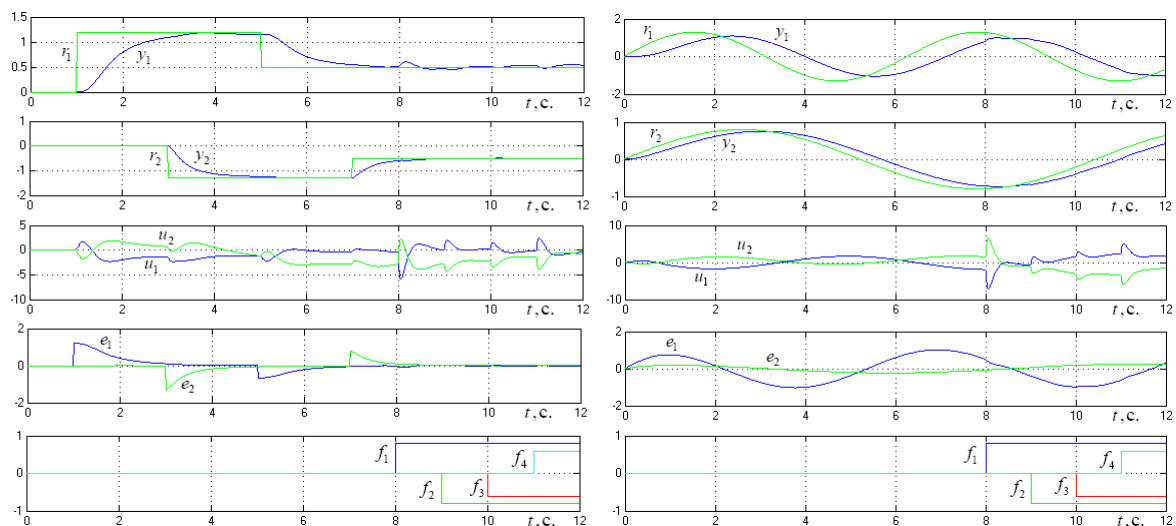
$$(49) \quad u = K_0 \tilde{u}, \quad K_0 = (B^*)^{-1},$$

$$\mu_1^2 \tilde{u}_1^{(2)} + d_{1,1} \mu_1 \tilde{u}_1^{(1)} = \frac{1}{T_1^2} e_1 + \frac{a_{1,1}^0}{T_1} e_1^{(1)} + e_1^{(2)}, \quad \mu_2 \tilde{u}_2^{(1)} = \frac{1}{T_2} e_2 + e_2^{(1)}.$$

Полагаем для всех рассматриваемых ниже алгоритмов управления приняты следующие значения параметров:  $a_{1,1}^0 = d_{1,1} = 2$ ,  $T_1 = T_2 = 0.5$  с.,  $\eta = 10$ , тогда  $\mu_1 = \mu_2 = 0.05$  с.

На рис. 1 представлены результаты моделирования системы (43) с алгоритмом управления (47) при кусочно-постоянном и гармоническом виде функций задающих воздействий  $r_1, r_2$ . Из графиков на рис. 1 видно, что в замкнутой системе (43), (47) обеспечивается формирование заданных показателей качества переходных процессов по выходным переменным  $y_1, y_2$  и подавление влияния внешних возмущений  $f_1, f_2, f_3, f_4$ . Вид переходных процессов по выходным переменным  $y_1, y_2$  определяется свойствами ПМД, т.е. свойствами эталонных уравнений. При гармонической форме функций задающих воздействий  $r_1, r_2$  имеет место большая величина ошибки слежения, которая может быть уменьшена путем уменьшения величин параметров  $T_1, T_2$ .

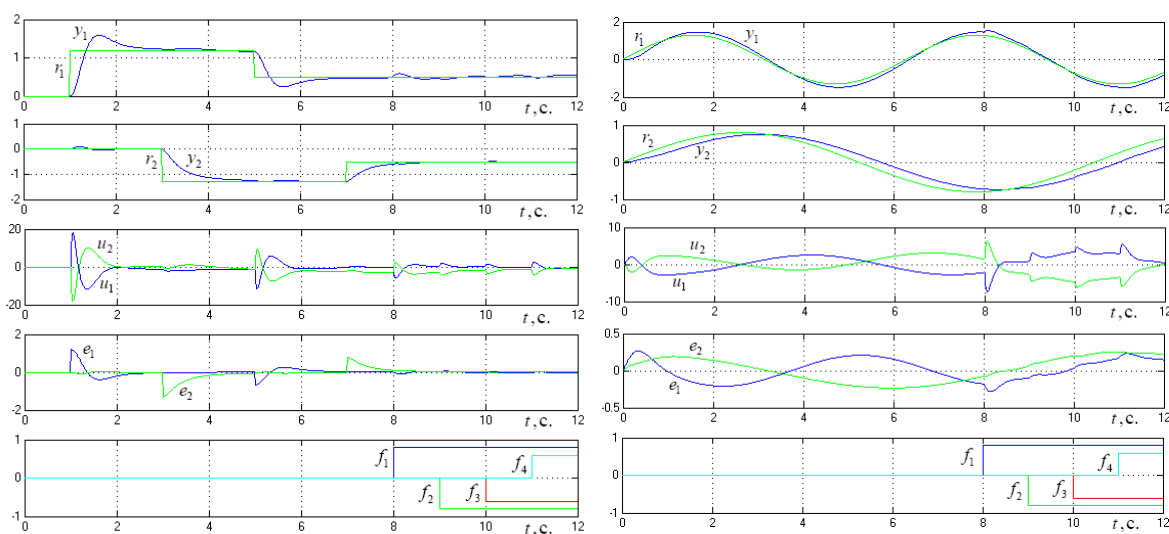




**Рис. 1.** Результаты моделирования системы (43),(47) при кусочно-постоянном и гармоническом виде функций задающих воздействий  $r_1, r_2$ .

На рис. 2 представлены результаты моделирования системы (43) с алгоритмом управления вида (48) при кусочно-постоянном и гармоническом виде функций задающих воздействий  $r_1, r_2$  и тех же значениях параметров алгоритма управления, что и в предыдущем случае. Из результатов моделирования на рис. 2 видно, что в замкнутой системе скорость и форма переходных процессов по выходным переменным  $y_1, y_2$  при ступенчатом изменении задающих воздействий  $r_1, r_2$  зависит от свойств и быстродействия ПМД, т.е. зависит от параметров  $T_1, T_2$ .

Из сравнения графиков на рис. 1 и рис. 2, видно, что величина ошибки слежения в системе (43),(48) для первого канала управления существенно меньше, чем в системе (43),(47). Величина ошибки слежения для второго канала управления в системах (43),(47) и (43),(48) одинаковые.

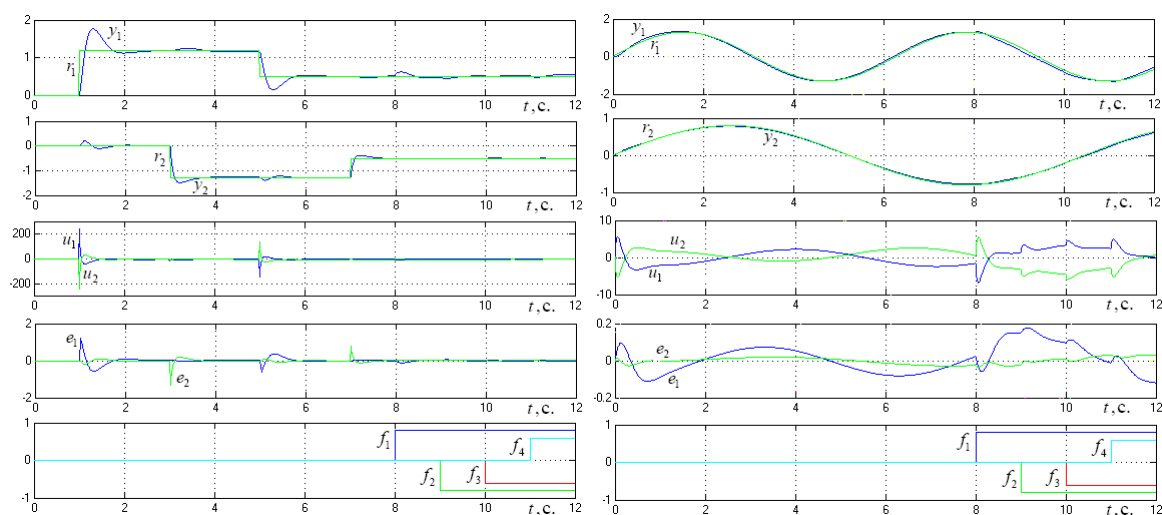


**Рис. 2.** Результаты моделирования системы (43), (48) при кусочно-постоянном и гармоническом виде функций задающих воздействий  $r_1, r_2$ .

На рис. 3 представлены результаты моделирования системы (43) с алгоритмом управления вида (49) при кусочно-постоянном и гармоническом виде функций задающих воздействий  $r_1, r_2$  и тех же значениях параметров алгоритма управления, что и в предыдущем случае. Из результатов моделирования на рис. 3 видно, что в замкнутой системе скорость и форма переходных процессов по выходным переменным  $y_1, y_2$  при ступенчатом изменении задающих воздействий  $r_1, r_2$  зависит от свойств и быстродействия ПБД, т.е. зависит от параметров  $\mu_1, \mu_2$ .

Свойства ПМД в системе (43),(49) проявляются в темпе реакции выходных переменных  $y_1, y_2$  на ступенчатое изменение внешних возмущающих воздействий  $f_1, f_2, f_3, f_4$ , где данный темп зависит от параметров  $T_1, T_2$ .

Из сравнения графиков на рис. 1 с графиками на рис. 2 и рис. 3, видно, что величина ошибки слежения в системе (43), (49) существенно меньше, чем в системе (43), (47) и системе (43), (48). Ошибка слежения в следящей системе (43), (49) уменьшается при уменьшении величин параметров  $\mu_1, \mu_2$ .



**Рис. 3.** Результаты моделирования системы (43), (49) при кусочно-постоянном и гармоническом виде функций задающих воздействий  $r_1, r_2$ .

## 7. Заключение

В данной работе представлена унифицированная методика синтеза регуляторов для многомерных линейных систем на основе формирования разнотемповых процессов в замкнутой системе. В частности приведены рекомендации для выбора структур алгоритмов управления для решения задач стабилизации выхода и задачи синтеза высокоточных следящих систем управления. Повышение точности регулирования, степени автономности каналов управления и степени подавления влияния внешних возмущений обеспечивается за счет увеличения степени разделения движений  $\eta$ . Обсуждаемый подход может быть использован для динамических объектов, удовлетворяющих условиям обратимости и свойству внутренней устойчивости.

Необходимо отметить робастность свойств синтезированной системы управления по отношению к вариациям параметров объекта управления. Фактически, для решения

задачи синтеза требуется знать индексы обратимости объекта управления, иметь оценки для параметров матрицы  $B^*$  (матрица высокочастотных коэффициентов усиления объекта) и должно сохраняться свойство внутренней устойчивости объекта управления при вариациях его параметров.

Анализ внутренней устойчивости выполняется на основе преобразования модели объекта к нормальной канонической форме (9) и последующего анализа устойчивости внутренней подсистемы. Отметим, что свойство внутренней устойчивости в данном случае совпадает со свойством устойчивости нулевой динамики [43, 44]. В работах [43, 44] для выделения уравнений нулевой динамики осуществляется преобразование модели объекта к нормальной канонической форме вида (9), но с дополнительным условием, что  $\tilde{B}_2$  есть нулевая матрица, т.е. матрица  $Q_{m+1}$  в преобразовании (8) должна формироваться с учетом дополнительного требования  $Q_{m+1}B = O$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект 14-08-01004-а.

## Список литературы

1. Морозовский В.Т. Многосвязные системы автоматического регулирования. М., Энергия, 1970. 288 с.
2. Ротач В.Я. Теория автоматического управления: учебник для вузов. М.: Изд. дом МЭИ, 2008. 396 с.
3. Медведев В.С., Романова Т.А. Синтез алгоритмов управления, обеспечивающих независимость подсистем многомерного объекта // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 1. С. 42-49.
4. Гайдук А.Р. Об управлении многомерными объектами // АиТ. 1998. № 12. С. 22-37.
5. Гайдук А.Р. Синтез систем управления многомерными объектами // Известия РАН. Теория и системы управления. 1998. Т. 37, № 1. С. 9-17.
6. Янушевский Р. Т. Теория линейных оптимальных многосвязных систем управления. М.: Наука, 1973. 464 с.
7. Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б. Метод динамической коррекции и автономизации каналов управления в многосвязных системах на основе формализма линейно-квадратичной оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 12. С. 2-6.
8. Александров А.Г., Честнов В.Н. Синтез многомерных систем заданной точности II. Применение процедур оптимизации // АиТ. 1998. № 8. С. 124-138.
9. Честнов В.Н. Синтез робастных регуляторов многомерных систем при параметрической неопределенности на основе круговых частотных неравенств // АиТ. 1999. № 3. С. 229-238.
10. Ильясов Б.Г., Кабальнов Ю.С. Исследование устойчивости однотипных многосвязных систем автоматического управления с голономными связями между подсистемами // АиТ. 1995. № 8. С. 82-90.
11. Кабальнов Ю.С. Кузнецов И.В. Синтез модального управления многосвязным объектом // Изв. ВУЗов. Приборостроение 1999. Т. 42, № 3-4. С. 14-19.
12. Лозгачев Г.И. Построение модальных регуляторов для одноконтурных и многосвязных систем // Автоматика и телемеханика. - М., РАН. 2000. № 12. С. 15-21.
13. Розенвассер Е. Н. Синтез многомерных линейных систем с заданными характеристиками полиномов // АиТ. 1996. № 8. С. 35-53.
14. Morgan, B.S., The synthesis of linear multivariable systems by state-variable feedback // IEEE Trans. Automat. Control. 1964. Vol. AC-9, No. 4. P. 405-411.
15. Falb P.L., Wolovich W.A. Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems // IEEE Trans. Automatic Control. 1967. Vol. AC-12, No. 6. P. 651-659.
16. Silverman L.M. Inversion of Multivariable Linear Systems // IEEE Trans. Automatic Control. 1969. Vol. AC-14, No. 3. P. 270-276.
17. Silverman L.M. Decoupling with state feedback and precompensation // IEEE Trans. Automatic Control. 1970. Vol. AC-15, No. 4. P. 487-489.
18. Singh S.N. Decoupling of Invertible Nonlinear Systems with state Feedback and Precompensation // IEEE Trans. Automatic Control. 1980. Vol. AC-25, No. 6. P. 1237-1239.
19. Porter W.A. Diagonalization and Inverses for Nonlinear Systems // Int. J. Control. 1970. Vol. 11, No. 1. P. 67-76.
20. Мееров М.В. Системы многосвязного регулирования. М.: Наука, 1965. 384 с.

21. Геращенко Е. И., Геращенко С. М. Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. М.: Наука. 1975. 296 с.
22. Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y. Singular Perturbations and Time Scales in Control Theory and Applications: An Overview 2002-2012 // Int. J. of Information Systems Sciences).2014. Vol. 9, No. 1. P. 1-36.
23. Young K.D., Kokotovic P.V., and Utkin V.I. A singular perturbation analysis of high-gain feedback systems // IEEE Trans. Automatic Control. 1977. Vol. AC-22, No. 3. P. 931-938.
24. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления. Цикл лекций: учеб. пособие для вузов. М.: Машиностроение, 2004. 576 с.
25. Крутько П.Д. Декомпозирующие алгоритмы робастно устойчивых нелинейных многосвязных управляемых систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2005. № 1. С. 28-45.
26. Юркевич В.Д. Синтез систем управления методом динамического сжатия // Известия Вузов. Приборостроение, 1994. Т. 37, № 7-8. С. 15-19.
27. Yurkevich V.D. Decoupling of uncertain continuous systems: Dynamic contraction method // Proc. of the 34<sup>th</sup> IEEE Conf. on Decision and Control. New Orleans, Louisiana, 1995. Vol. 1. P. 196-201.
28. Yurkevich V.D. PI/PID Control for Nonlinear Systems via Singular Perturbation Technique // Advances in PID Control. InTech, 2011. P. 113-142.
29. Юркевич В.Д. Расчет и настройка регуляторов для нелинейных систем с разнотемповыми процессами // Автометрия, 2012. Т. 48, № 5. С. 24-31.
30. Шубладзе А.М., Кузнецов С.И. Автоматически настраивающиеся промышленные ПИ и ПИД регуляторы // Автоматизация в промышленности. 2007. № 2. С. 15-17.
31. Александров А.Г., Паленов М.В. Самонастраивающийся ПИД/И-регулятор // Автоматика и телемеханика. 2011. № 10. С. 4-18.
32. Astrom K.J., Hagglund T.. Advanced PID control. ISA, The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2006. 460 p.
33. O'Dwyer A. Handbook of PI and PID Tuning Rules. London: Imperial College Press, 2003. 375 p.
34. Li Y., Ang K. H., Chong G. C. Y. PID Control System Analysis and Design // IEEE Control Systems Magazine. 2006. 26, No. 1. P. 32 - 41.
35. Chang M., Davison E.J. The Adaptive Servomechanism Problem for MIMO Systems // Proc. of the 34<sup>th</sup> IEEE Conf. on Decision and Control. New Orleans, Louisiana, 1995. P. 1738-1743.
36. Astrom K.J., Johansson K.H., Qing-Guo Wang Design of decoupled PID controllers for MIMO systems // Proc. of American Control Conf. 2001. Vol. 3. P. 2015-2020.
37. Mete A.N., Gundes A.N., Ozbay H. Decoupled PID Controller Synthesis for MIMO Plants with I/O Delays // Proc. of the 45<sup>th</sup> IEEE Conf. on Decision & Control. San Diego, CA, USA, December 13-15, 2006. P. 852-857.
38. Чайковский М.М., Ядыкин И.Б. Оптимальная настройка ПИД-регуляторов для многосвязных билинейных объектов // АИТ. 2009. № 1. С. 130-146.
39. Vu T.N.L., Lee J., and Lee M. Design of Multi-loop PID Controllers Based on the Generalized IMC-PID Method with Mp Criterion // Int. J. of Control, Automation, and Systems. 2007. Vol. 5, No. 2. P. 212-217.
40. Wang Q.-G., Nie Z.-Y. PID Control for MIMO Processes // PID Control in the Third Millennium, Advances in Industrial Control. London: Springer, 2012. P. 177-204.
41. Юркевич В.Д. Алгоритм анализа реализуемости управляющих воздействий, обеспечивающих заданные движения на выходе объекта // Тр. МВТУ № 508: Автоматизированное проектирование систем управления: Межвуз. сб. М.: МВТУ, 1987. С. 28-40.
42. Юркевич В.Д. Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами. СПб.: Наука, 2000. 287 с.
43. Isidori A. Nonlinear Control Systems: An Introduction // Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 1989.
44. Isidori A., Byrnes C.I. Output regulation of nonlinear systems // IEEE Trans. Automatic Control. 1990. Vol. AC-35. P. 131-140.